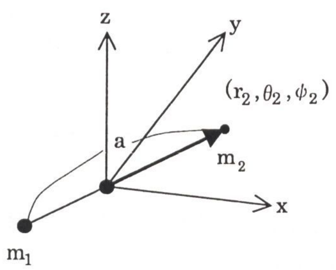
力　学　問　題 (No.10)

7/13 2005（小宮山）

39. 長さ a の質量を無視できる棒の両端に質量 m_1, m_2 の質点が付いている（2原子分子のモデル)。この系の質量中心のまわりの運動のラグランジアンとハミルトニアンを、極座標で求めよ。



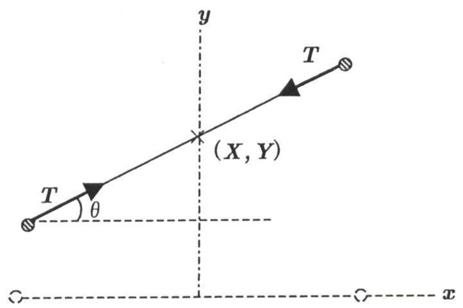
40. 力を受けない質点の３次元の運動について、直交座標を一般座標とし、ハミルトニアンを作り、正準方程式を立てこれを解け。(原島鮮「質点系；剛体の力学」裳華堂　より）

41. 線形調和振動子（１次元調和振動子）のハミルトニアンを書き、正準方程式を立てこれを解け。横軸に座標 x、縦軸に運動量 p をとるとき、この (x,p) で与えられる点はどのように運動するか。(原島鮮「質点系；剛体の力学」裳華堂　より）

42. ハミルトニアン H が一定値をとることを証明せよ。(原島鮮「質点系；剛体の力学」裳華堂　より）

7/13 2005（小宮山）

34.



重心運動については、$M\ddot{\vec{R}} = \vec{F}$ $(M = 2m)$ の右辺の $\vec{F}$ として撃力を考え、撃力の働く短い時間について積分する。重心の座標を (X, Y) として

$$2m\dot{Y} = \phi, \quad 2m\dot{X} = 0 \qquad (1)$$

となる。したがって、重心運動は

$$X = 0, \quad Y = \frac{\phi}{2m}t \qquad (1)'$$

であらわせるような、y 軸上の等速度運動になる。

次ぎに内部運動は極座標 r, θ であらわせる（r は一定で ℓ に等しい）。撃力は r 方向に成分をもたず、θ 方向にのみ成分をもつから、r 方向の運動方程式は、棒の張力を T として、

$$\frac{m}{2}(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) = -T \quad \text{または} \quad T = \frac{m\ell}{2}\dot{\theta}^2 \qquad (2)$$

θ 方向の運動方程式は、撃力を $F(t)$ とおき、

$$\frac{m}{2}\frac{1}{\ell}\frac{d}{dt}(\ell^2\dot{\theta}^2) = F(t)。$$

撃力の働く短い時間に積分して、

$$\dot{\theta} = \frac{2\phi}{m\ell}。 \qquad (3)$$

したがって、回転運動は

$$\theta = \frac{2\phi}{m\ell}t \qquad (3)'$$

で与えられる。

結局、重心は撃力の向きに一定の速さ $\phi/2m$ で運動し、棒は重心のまわりに一定の角速度 $2\phi/m\ell$ で回転する。棒の張力は (2) から $2\phi^2/m\ell$ となる。

基礎物理学選書 22「力学演習」（野上茂吉郎著）裳華房　より

35. (1)

$$
\begin{aligned}
q_r &= x_r \quad (r = 1, 2, \cdots, 3n) \\
T &= \sum_{r=1}^{3n} \frac{1}{2} m_r \dot{x}_r^2 \quad \text{より} \\
\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_r} &= \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_r} = m_r \dot{x}_r \\
\frac{\partial T}{\partial q_r} &= 0 \\
U &= U(x_1, x_2, \cdots, x_{3n})\text{、} \quad \text{かつ束縛力はゼロなので、}
\end{aligned}
$$

r 番目の質点に働く力（の x_r 方向の成分）は

$$
F_r = F_{r,\,\text{保存}} = -\frac{\partial U}{\partial x_r} = -\frac{\partial U}{\partial q_r}
$$

従って、ラグランジュ方程式は、

$$
\boxed{\frac{d}{dt} m_r \dot{x}_r = F_r} \quad (r = 1, 2, \cdots, 3n)
$$

これはニュートンの運動方程式そのものだ。

(2)

$$
\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases} \qquad \begin{cases} \dot{x} = \dot{r}\cos\varphi - r(\sin\varphi)\dot{\varphi} \\ \dot{y} = \dot{r}\sin\varphi + r(\cos\varphi)\dot{\varphi} \end{cases}
$$

$$
\begin{aligned}
T &= \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) \\
&= \frac{1}{2} m \left[\{\dot{r}\cos\varphi - r(\sin\varphi)\dot{\varphi}\}^2 + \{\dot{r}\sin\varphi + r(\cos\varphi)\dot{\varphi}\}^2 \right] \\
&= \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2) \quad \text{より,}
\end{aligned}
$$

r 成分について、

$$
\underline{\frac{\partial T}{\partial \dot{r}} = m\dot{r}, \quad \frac{\partial T}{\partial r} = mr\dot{\varphi}^2}
$$

従って、

$$
\boxed{m\ddot{r} - mr\dot{\varphi}^2 = -\tfrac{\partial U}{\partial r}}
$$

これはⅣ章 (5) の第 1 式と同じである。

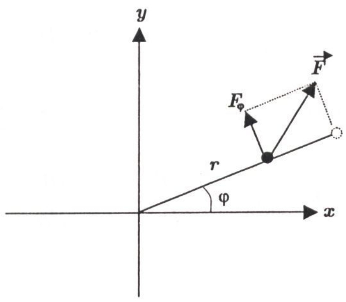
y 成分ににについて、

$$\underline{\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = mr^2\dot{\varphi}, \quad \frac{\partial T}{\partial \varphi} = 0}$$

従って

$$\boxed{\frac{d}{dt}(mr^2\dot{\varphi}) = -\frac{\partial U}{\partial \varphi}}$$

これはⅣ章 (5) の第２式の両辺に r を乗じたものと同じである。ただし、



y 方向の力 F_φ は、ポテンシャル U を F_φ 方向の 微小長さ$(rd\varphi)$ で微分した量なので、

$$F_\varphi = -\frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial \varphi}$$

となることに注意せよ。

(2a)

$$\left\{\begin{array}{l} r\text{ に共役な一般化運動量 }\boxed{\frac{\partial T}{\partial \dot{r}} = m\dot{r}}\text{ は}\underline{r\text{ 方向の運動量}}\text{である。} \\ \\ \varphi\text{ に共役な一般化運動量 }\boxed{\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = mr^2\dot{\varphi}}\text{ は}\underline{\text{角運動量}}\text{(の }z\text{ 成分)である。} \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{l} \text{一般化力の }r\text{ 成分}\boxed{-\frac{\partial U}{\partial r}}\text{は}\underline{r\text{ 方向の力である。}} \\ \\ \text{一般化力の}\varphi\text{ 成分}\boxed{-\frac{\partial U}{\partial \varphi} = rF_\varphi}\text{は}\underline{\text{力のモーメント}}\text{(の }z\text{ 成分)である。} \end{array}\right.$$

つまり、二つのラグランジュ方程式は、それぞれ

$$\boxed{\begin{array}{l} \frac{d}{dt}(\text{運動量}) = \text{力} \\ \frac{d}{dt}(\text{角運動量}) = \text{力のモーメント} \end{array}}$$

を意味する。さらに、

$$\left\{\begin{array}{l} \text{見かけの力の }r\text{ 成分}\boxed{\frac{\partial T}{\partial r} = mr\dot{\varphi}^2}\text{は、俗に言う「遠心力」である。} \\ \\ \text{見かけの力の}\varphi\text{ 成分はゼロ}\boxed{\frac{\partial T}{\partial \varphi} = 0}\text{ である。} \end{array}\right.$$

36. おもりの運動エネルギーは

$$K = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}mr^2\dot{\theta}^2,$$

位置エネルギーは

$$U = -mgr\cos\theta + \frac{c}{2}(r - r_0)^2$$

となる。したがって、Lagrange 関数は

$$L(r, \dot{r}; \theta, \dot{\theta}) = K(r, \dot{r}; \dot{\theta}) - U(r, \theta)$$

と書ける。

$$\frac{\partial L}{\partial r} = mr\dot{\theta}^2 + mg\cos\theta - c(r - r_0), \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\dot{r},$$
$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = -mgr\sin\theta, \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = mr^2\dot{\theta}$$

によって、Lagrange 方程式は

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{r}}\right) - \frac{\partial L}{\partial r} = m\ddot{r} - mr\dot{\theta}^2 - mg\cos\theta + c(r - r_0) = 0,$$
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = \frac{d}{dt}(mr^2\dot{\theta}) + mgr\sin\theta = 0$$

となる。この結果は、極座標を用いた Newton の運動方程式と同じであることを確かめておくように。

37.

$$m\ddot{r} - mr\dot{\theta}^2 - mg\cos\theta + c(r - r_0) = 0,$$
$$\tfrac{d}{dt}(mr^2\dot{\theta}) + mgr\sin\theta = 0$$

を小振動の場合に解く。

m で割って、$c/m = \omega_0^2$ とおくと、

$$\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - g\cos\theta + \omega_0^2(r - r_0) = 0, \qquad (1)$$
$$r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} + g\sin\theta = 0. \qquad (2)$$

小振動のときは θ は常に小さく、$s = r - r_0$ は r_0 にくらべて十分に小さい。すると、

$$\ddot{s} - (r_0 + s)\dot{\theta}^2 - g(1 - \tfrac{1}{2}\theta^2 + \cdots) + \omega_0^2 s = 0, \qquad (3)$$
$$(r_0 + s)\ddot{\theta} + 2\dot{s}\dot{\theta} + g(\theta - \tfrac{1}{6}\theta^3 + \cdots) = 0 \qquad (4)$$

の第 1 式の $\theta^2, \dot{\theta}^2$ を含む項と第 2 式の $s\ddot{\theta}, \dot{s}\dot{\theta}, \theta^3$ を含む項を省いて、

$$\ddot{s} + \omega_0^2 s = g, \quad \ddot{\theta} + \omega_1^2\theta = 0, \quad \omega_1^2 = \frac{g}{r_0} \qquad (5)$$

と近似してよいであろう。この解は

$$\left.\begin{aligned} r - r_0 = s = \tfrac{g}{\omega_0^2} + a\sin(\omega_0 t + \alpha), \\ \theta = \theta_0 \sin(\omega_1 t + \beta) \end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

となり、積分定数 $a, \alpha, \theta_0, \beta$ は初期条件からきまる。このように、小振動ではばねの伸縮による振動 (ω_0) と振り子の振動 (ω_1) が独立に起こる退屈な運動である。

上述の近似が妥当かどうかを調べよう。(6) から、$|\dot{\theta}| \cong \omega_1|\theta_0|$、$|\ddot{\theta}| \cong \omega_1^2|\theta_0|$ であるから、(3) の第 2 項は $r_0\dot{\theta}^2 \cong r_0\omega_1^2\theta_0^2$、第 1 項は $|\ddot{s}| \cong \omega_0^2|a|$。したがって、近似が成り立つのは、$r_0\omega_1^2\theta_0^2 \ll \omega_0^2|a|$, すなわち、

$$|\theta_0| \ll \frac{\omega_0}{\omega_1}\sqrt{\frac{|a|}{r_0}}$$

の場合である。一方、(4) では、第 1 項は　$|r_0\ddot{\theta}| \cong r_0|\theta_0|\omega_1^2$、第 3 項は　$|\dot{s}\dot{\theta}| \cong |a||\theta_0|\omega_0\omega_1$、したがって、後者を前者にくらべて無視できるのは、

$$|a| \ll \frac{\omega_1}{\omega_0} r_0$$

の場合である。したがって、$r - r_0$ の振幅 $|a|$ と θ の振幅 θ_0 が上の二つの不等式を満足するぐらいに小さいならば、上述の近似は妥当である。

38.

$$\begin{aligned} [q_k, H] &= \sum_\ell \left(\frac{\partial q_k}{\partial q_\ell}\frac{\partial H}{\partial p_\ell} - \frac{\partial q_k}{\partial p_\ell}\frac{\partial H}{\partial q_\ell}\right) = \frac{\partial H}{\partial p_k} \\ [p_k, H] &= \sum_\ell \left(\frac{\partial p_k}{\partial q_\ell}\frac{\partial H}{\partial p_\ell} - \frac{\partial p_k}{\partial p_\ell}\frac{\partial H}{\partial q_\ell}\right) = -\frac{\partial H}{\partial q_k} \end{aligned}$$

力　学　解　答 (No.10)

7/14 2005（小宮山）

39. 質量中心を原点とする極座標 $(r_1, \theta_1 \varphi_1)$, $(r_2, \theta_2, \varphi_2)$ を用いる。

$$
\begin{gathered}
r_1 + r_2 = a, \\
\theta_1 + \theta_2 = \pi \longrightarrow \dot{\theta}_1 = -\dot{\theta}_2 \\
|\varphi_1 - \varphi_2| = \pi \longrightarrow \dot{\varphi}_1 = \dot{\varphi}_2
\end{gathered}
$$

$$
\begin{aligned}
\therefore \quad L &= \frac{m_1}{2}(r_1^2 \dot{\theta}_1^2 + r_1^2 \sin^2\theta_1 \dot{\varphi}_1^2) + \frac{m_2}{2}(r_2^2 \dot{\theta}_2^2 + r_2^2 \sin^2\theta \dot{\varphi}_2^2) \\
&= \frac{I}{2}\dot{\theta}_1^2 + \frac{I}{2}\sin^2\theta_1 \dot{\varphi}_1^2
\end{aligned}
$$

ただし、$I = m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2$。

$$
p_{\theta_1} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1} = I\dot{\theta}_1, \quad p_{\varphi_1} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}_1} = I\sin^2\theta \dot{\varphi}_1
$$

よって、

$$
H = I\dot{\theta}_1^2 + I\sin^2\theta \dot{\varphi}_1^2 - L = \frac{p_{\theta_1}^2}{2I} + \frac{p_{\varphi_1}^2}{2I\sin^2\theta_1}
$$

40.

$$
H = \frac{1}{2m}(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2)
$$

正準方程式は、

$$
\begin{aligned}
&\tfrac{dx}{dt} = \tfrac{\partial H}{\partial p_x} = \tfrac{p_x}{m}, \quad \tfrac{dy}{dt} = \tfrac{\partial H}{\partial p_y} = \tfrac{p_y}{m}, \quad \tfrac{dz}{dt} = \tfrac{\partial H}{\partial p_z} = \tfrac{p_z}{m} \\
&\tfrac{dp_x}{dt} = -\tfrac{\partial H}{\partial x} = 0, \quad \tfrac{dp_y}{dt} = -\tfrac{\partial H}{\partial y} = 0, \quad \tfrac{dp_z}{dt} = -\tfrac{\partial H}{\partial_z} = 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\therefore \quad & p_x = \text{一定} = \alpha, \quad p_y = \text{一定} = \beta, \quad p_z = \text{一定} = \gamma \\
& \tfrac{dx}{dt} = \tfrac{\alpha}{m}, \quad \tfrac{dy}{dt} = \tfrac{\beta}{m}, \quad \tfrac{dz}{dt} = \tfrac{\gamma}{m}
\end{aligned}
$$

41.

$$
H = \tfrac{1}{2m}p^2 + \tfrac{1}{2}cx^2 = \tfrac{1}{2m}p^2 + 2\pi^2 m\nu^2 x^2 \tag{1}
$$

$$
\therefore \quad \tfrac{dx}{dt} = \tfrac{\partial H}{\partial p} = \tfrac{p}{m} \tag{2}
$$

$$
\tfrac{dp}{dt} = -\tfrac{\partial H}{\partial x} = -4\pi^2 m\nu^2 x \tag{3}
$$

41.

$$H = \frac{1}{2m}p^2 + \frac{1}{2}cx^2 = \frac{1}{2m}p^2 + 2\pi^2 m\nu^2 x^2 \qquad (1)$$
$$\therefore \quad \frac{dx}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{p}{m} \qquad (2)$$
$$\frac{dp}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x} = -4\pi^2 m\nu^2 x \qquad (3)$$

(2),(3) から

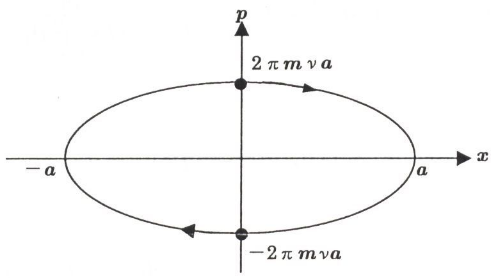
$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{1}{m}\frac{dp}{dt} = -4\pi^2\nu^2 x$$
$$\therefore x = a\cos(2\pi\nu t + \alpha)$$

(2) から

$$p = m\frac{dx}{dt} = -ma \cdot 2\pi\nu\sin(2\pi\nu t + \alpha)$$

これから

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{p^2}{4\pi^2 m^2\nu^2 a^2} = 1$$



したがって、一平面上に x と p を直交座標にとると、調和振動子の運動状態を表す (x, p) 点は楕円を描く。第 1 象限 $(x > 0, p > 0)$ で $\frac{dx}{dt} > 0, \frac{dp}{dt} < 0$ であることから図のように時計回りであることがわかる。このような (x, p) 空間を**位相空間**または　**状態空間** (phase space) とよぶ。

42.　　略

MEMO

7/14　2005　（小宮山）

IX　ハミルトンの正準方程式

（1）　ルジャンドル変換

独立変数$(x, y, z, \cdots)$をもつ関数　$f(x, y, z, \cdots)$　の全微分は

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz + \cdots \tag{13}$$

で表される。ここで、

$$X \equiv \frac{\partial f}{\partial x} \tag{14}$$

を導入して、 xとX を入れ換えた$(X, y, z, \cdots)$を独立変数とする別の関数$g(X, y, z, \cdots)$を$f(x, y, z, \cdots)$をもとにして作る最も簡単なやり方が以下である。

$$\boxed{g \equiv f - \frac{\partial f}{\partial x}x} \tag{15}$$

これを　$f \to g$ へのルジャンドル変換という。gはfと同じ次元を持つ異なる物理量である。

(15)で定義されるgが$(X, x, y, z, \cdots)$を独立変数に持つことの証明：

(15)より、$dg = df - Xdx - xdX$

(13)より、$dg = -xdX + \dfrac{\partial f}{\partial y}dy + \dfrac{\partial f}{\partial z}dz + \cdots$

これはすなわち、gが$(X, y, z, \cdots)$を独立変数とすることを意味する。」証明終わり

このように、ある物理量fをルジャンドル変換して別の物理量gを導出することができる。このようにして機械的に導出したgが、時として便利な物理的概念を与える量である場合がある。

例）熱力学：（気体を表す独立変数はV, S, T, pのうちの任意の２つであることが決まってる。）

内部エネルギーUを独立変数を(S, V)に選んで表すと、

$$\underline{dU = Tds - pdV}$$

$$\frac{\partial U}{\partial S} = T,\quad \frac{\partial U}{\partial V} = -p$$

① $U(S, V)$をもとに、$(\partial U/\partial V, S) = (p, S)$を独立変数する別の関数をルジャンドル変換により作ってみる。

$$H(S, p) = U - \frac{\partial U}{\partial V}V = U + pV$$

$\underline{dH = TdS + Vdp}$　　これは「エンタルピー」だ。

② 次に$U(S, V)$　をもとに　$(\partial U/\partial S, V) = (T, V)$　を独立変数とする別の関数$F(T, V)$をルジャンドル変換により作ってみる。

$$F(T,V) = U - \frac{\partial U}{\partial S}S = U - TS$$

$\underline{dF = -SdT - pdV}$　これは「ヘルムホルツの自由エネルギー」だ。

③ $F(T,V)$をもとに$(\partial F/\partial V, T) = (p,T)$を独立変数とする別の関数$G(T,p)$を作ってみる

$$G(T,p) = F - \frac{\partial F}{\partial V}V = F + pV$$

$dG = -SdT + Vdp$ 5　　　これは「ギブスの自由エネルギー」だ。

このように、Uをもとにルジャンドル変換することによりH, F, Gというそれぞれ異なる有用な物理量を次々に導くことができるのだ。

（2） Hamilton の正準方程式

Lagrange 関数；$L(q_r, \dot{q}_r)$はq_rと$\dot{q}_r$を独立変数としてもつ関数である。

ここで、

$$dL = \sum_{r=1}^{f}\left(\frac{\partial L}{\partial q_r}dq_r + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_r}d\dot{q}_r\right) \tag{16}$$

(9)、(10)より

$$dL = \sum_{r=1}^{f}\left(\dot{p}_r dq_r + p_r d\dot{q}_r\right)$$　に注意しておく。

さて、独立変数を$(q_r, \dot{q}_r) \to \left(q_r, \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_r}\right)$に変えて新たな関数$H$をルジャンドル変換で導出してみる。

$$H = L - \sum_{r=1}^{f}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_r}\dot{q}_r$$

後のことを考えて、Hの符号を変えておく。

$$\boxed{H = \sum_{r=1}^{f} p_r \dot{q}_r - L} \quad ;\text{ハミルトン関数} \tag{17}$$

ただし$p_r = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_r}$

Hの独立変数が確かに(q_r, p_r)になっていることを確かめよう。

(17)より　$dH = \sum_{r=1}^{f}\left(p_r d\dot{q}_r + \dot{q}_r dp_r\right) - dL$

(16)より　$$dH = \sum_{r=1}^{f}\left(\dot{q}_r dp_r - \dot{p}_r dq_r\right) \tag{18}$$

<u>*OK!*</u>

(18)より直ちに以下が求まる。

$$\boxed{\begin{aligned}\frac{\partial H}{\partial p_r} &= \dot{q}_r \\ \frac{\partial H}{\partial q_r} &= -\dot{p}_r\end{aligned}} \qquad \text{これが Hamilton の正準方程式である。} \tag{19}$$

(19)は$2f$ ヶ $(r=1,2,\cdots,f)$の1階微分方程式である。これを解けば$2f$ ヶの変数$q_r(t)$と$p_r(t)$が求まる。

ニュートンの運動方程式 ⇔ Lagrange 方程式 ⇔ Hamilton の正準方程式
どれも同等である。

（3）ハミルトン関数とエネルギー

$H = T + V$　（全エネルギー）であることを以下に示す。

$L = T - U$　より　$H = 2T - L$　を示せばよい。

さらに(17)より

$$T = \frac{1}{2}\sum_{r=1}^{f} p_r \dot{q}_r \tag{20}$$

を示せばよい。

p_rをデカルト座標　$\vec{r}_i$で表す。

$$p_r = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_r} = \frac{\partial}{\partial \dot{q}_1}\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2}m_i\dot{\vec{r}}_i^{\,2} - U\right)$$

$\dfrac{\partial U}{\partial \dot{q}_r} = 0$なので

$$p_r = \sum_{i=1}^{n} m_i\left(\dot{\vec{r}}_i\cdot\frac{\partial \dot{\vec{r}}_i}{\partial \dot{q}_r}\right) = \sum_{i=1}^{n} m_i\left(\dot{\vec{r}}_i\cdot\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_r}\right)$$

(20)の右辺に代入して

$$\frac{1}{2}\sum_{r=1}^{f}\sum_{i=1}^{n} m_i\left(\dot{\vec{r}}_i\cdot\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_r}\dot{q}_r\right) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i\dot{\vec{r}}_i\cdot\dot{\vec{r}}_i = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i\left|\dot{\vec{r}}_i\right|^2$$

確かにこれは運動エネルギーである。

よって(20)式が示せた。

(19)を使って実際に解く手順

(i) $L = T - U$ を $(q_r, \dot{q}_r)$ で書き下す。
(ii) $p_r = \dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_r}$ を使って p_r の表式を出す。
(iii) $H = T + U$ を(ii)を使って (q_r, p_r) で書き下す。
(iv) その後(19)式を解いて $q_r(t), p_r(t)$ を求める。

（4）ポアソンの括弧

一般の物理量 F の時間変化を導出する。

$F(q_r, p_r) : (q_r, p_r)$ の任意の関数とする。

$$\frac{dF}{dt} = \sum_{r=1}^{f}\left(\frac{\partial F}{\partial q_r}\dot{q}_r + \frac{\partial F}{\partial p_r}\dot{p}_r\right)$$

(19)より

$$\boxed{\frac{dF}{dt} = \sum_{r=1}^{f}\left(\frac{\partial F}{\partial q_r}\frac{\partial H}{\partial p_r} - \frac{\partial F}{\partial p_r}\frac{\partial H}{\partial q_r}\right)} \qquad (22)$$

又は、(p_r, q_r) の任意の関数 F と G に対して $[F,G]$ を以下

$$\underline{[F,G] \equiv \sum_{r=1}^{f}\left(\frac{\partial F}{\partial q_r}\frac{\partial H}{\partial p_r} - \frac{\partial F}{\partial p_r}\frac{\partial G}{\partial q_r}\right)} \qquad \text{ポアソンの括弧}$$

で定義すれば、(22)は

$\boxed{\dfrac{dF}{dt} = [F, H]}$ と書いてもよい。