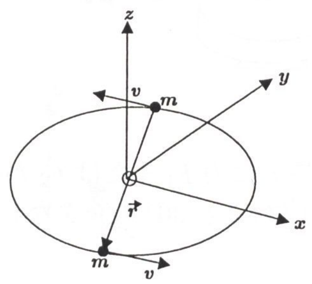
力　学　問　題 (No.5)

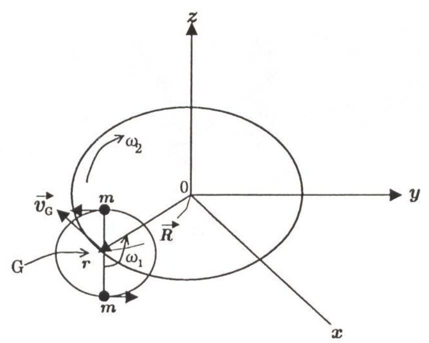
5/25 2005（小宮山）

17. xy 面上の円周（半径 r）の反対側に二つの質点（それぞれ m）があり、それぞれ速度 v で等速円運動している。

$+z$ 方向からみて反時計廻りに廻っているとき、中心の周りに二つの質点がもつ角運動量 $\vec{L}$ を求めよ。



18. 上問 17 のように、距離 $2r$ 離れた二つの質点（それぞれ m）がその中点 G(重心）を中心に角速度 ω_1 で（反時計廻りに）廻っており、同時にその重心 G は原点のまわりを角速度 ω_2 で時計廻りに廻っている。



半径 R の円周も半径 r の円周もともに xy 面上にある。

(1) 二つの質点の原点 0 のまわりの $\vec{L}$ を求めよ。

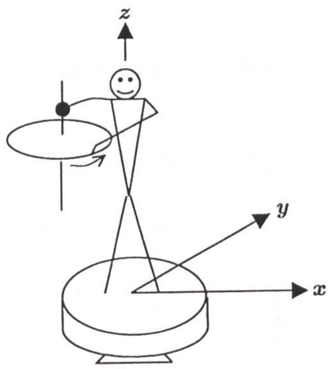
(2) $\vec{L} = 0$ となるための ω_1 と ω_2 の関係を求めよ。

19.　惑星に対するケプラー法則

$$\text{面積速度　一定；}\quad rv_\varphi = \text{一定}$$

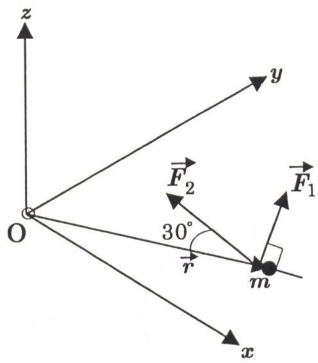
が角運動量の保存と同一であることを確かめよ。

20. ターンテーブルにのった人間が垂直（z 軸）方向に軸を固定した静止した車輪を保持して静止している。次ぎに上（$+z$）から見て反時計回りにまわし始めた。何が起こるか？



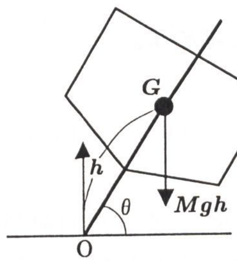
21. xy 面上の位置ベククトル $\vec{r}$ にある質点 m に力 $\vec{F_1}$ または $\vec{F_2}$ が働いている。$\vec{F_1}$ も $\vec{F_2}$ も xy 面内にあり、図のように $\vec{F_1}$ は $\vec{r}$ と直角、$\vec{F_2}$ は $\vec{r}$ と 30° の角をなしている。また $\vec{F_1}$ と $\vec{F_2}$ の大きさは等しい：$|\vec{F_1}| = |\vec{F_2}| = F$。

ここで、$\vec{F_1}$ と $\vec{F_2}$ が O のまわりに作る力のモーメント $\vec{N_1}$ と $\vec{N_2}$ をそれぞれ求めよ。

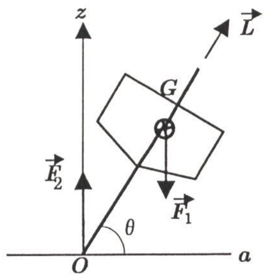


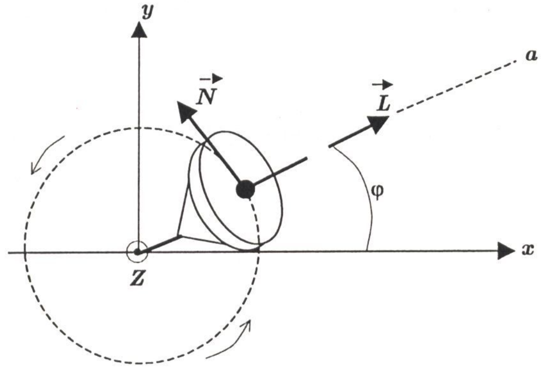
22. 質量 M のコマの重心 G が軸の先端から距離 h にある。軸が水平から θ だけ傾いている。

(1) コマに働く O のまわりの力のモーメント $\vec{N}$ を求めよ。



(2) さらに、コマの軸を水平な xy 面上に投影した時に x 軸から角度 φ をなすとする。φ が時間とともにどう変化するか、論ぜよ。(歳差運動)





23. 二つの質点 (m) が xy 面上を回転している問 16 の状態において、$r = r_1 \to r_2$ とするのに要する (z 軸のまわりの) 力のモーメントはいくらか?

$r = r_1 \to r_2$ で角運動量は保存するか?

問 16 の答を導け。

24. 参考書「力学」阿部龍蔵著 (サイエンス社) の

(1) p.114,115 の「つり合いの例」をしっかり読む。

(2) p.118-120 の「例 1　等角加速度運動」「例 2　アトウッド (Atwood) の器械」をしっかり読む。

(3) p.135 の演習問題 1~8 を解く。

力　学　解　答 (No.4)

5/25 2005（小宮山）

14.　（参考書 p.175 の 5）

(a) $(A+B)\times C$ の x 成分は

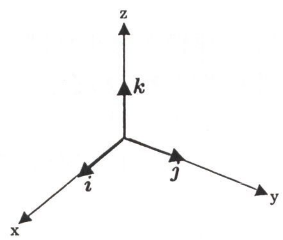
$$(A_y+B_y)C_z - C_y(A_z+B_z)$$

である。また、$A\times C + B\times C$ の x 成分は

$$(A_yC_z - A_zC_y) + (B_yC_z - B_zC_y)$$

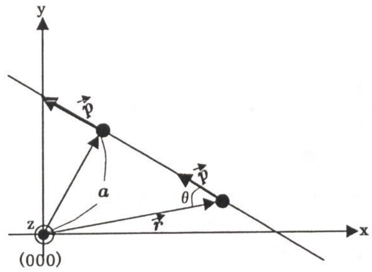
となり、両者は等しい。y, z 成分も同様である。同じようにして、$A\times(B+C) = A\times B + A\times C$ が示される。

(b) $i\times j$ は z 方向を向き、しかもその大きさは 1 である。このため $i\times j = k$ が成り立つ（下図）。まったく同様な考察により $j\times k = i,\quad k\times i = j$ の関係が示される。



15. (1) 質点の位置ベクトルを $\vec{r}$ として、

$$\vec{L} = \vec{r}\times\vec{p}$$

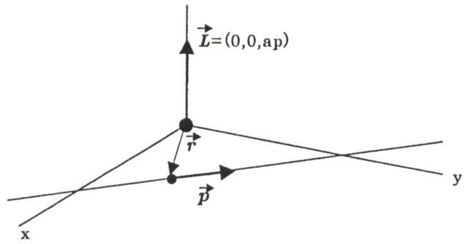


$\vec{L}$ の向きが $+z$ 方向であることは明らか。

$$|\vec{L}| = r\,p\ \sin\theta$$

一方 $r\sin\theta = a$ より

$$|\vec{L}| = ap = amv = 一定$$



(2)

$$\vec{r} = (x, y, z) \quad \text{ただし} \quad z = 0$$
$$\vec{v} = (\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) \quad \text{ただし} \quad \dot{z} = 0$$

$$\vec{L} = (L_x, L_y, L_z) \text{ として、}$$

$$\begin{cases} L_x = yp_z - zp_y = m(y\dot{z} - z\dot{y}) = 0 \\ L_y = zp_x - xp_z = m(z\dot{x} - x\dot{z}) = 0 \\ L_z = xp_y - yp_x = m(x\dot{y} - y\dot{x}) \end{cases}$$

つまり $\vec{L}$ は z 軸方向である。

(3) 「直線上を運動する」ということは、y 座標が決まれば x 座標が決まってしまうということである。つまり、x か y のどちらかを消去すべきである。

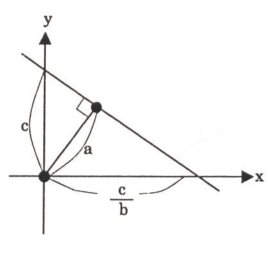
$$y = -bx + c \qquad \text{及び両辺を } t \text{ で微分して}$$

$$\dot{y} = -b\dot{x}$$

これら二つの式を使って (2) の結果を $x, \dot{x}$ だけで表すと、

$$\begin{cases} L_x = 0 \\ L_y = 0 \\ L_z = -mc\dot{x} \end{cases}$$

次ぎに、$|\vec{v}| = v = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} = \sqrt{1+b^2}|\dot{x}|$ に注意。また、下図より



$$a = \frac{|c|}{\sqrt{1+b^2}}$$

従って、

$$|L_z| = m|c\dot{x}| = mav = \text{一定。}$$

符号に関しては $\dot{x}$ と c の符号による。(右手系に従うことを納得せよ。)

16.

「誤った答] 運動エネルギー $2\times\frac{m}{2}v_1^2$ が保存するだろうから $v_1=v_2$ ではないか？と考えれば、

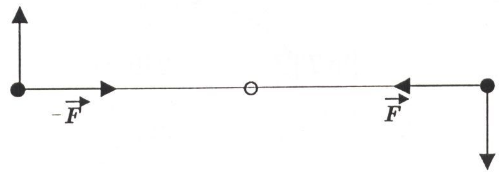
$$\boxed{\omega_2=\frac{v_2}{r_2}=\frac{v_1}{r_2}=\frac{r_1}{r_2}\omega_1\ (\text{誤り})} \qquad (1)$$

つまり角速度は半径の比の一乗に反比例して増大する。ということになるが、これは誤り。

[正しい答]　腕は内向きの力

$$|\vec{F}|=mv_1^2/r_1$$

で質点を保持していた筈であり、



その力の方向に $r_1\to r_2$ としたのだから、腕は質点に正の仕事をした筈である。その結果運動エネルギーは増大すると考えるべきだ。$v_2>v_1$ となるから、ω_2 は (1) 式よりはもっと激しく増大するはずである。

ω_2 をちゃんと求めるのは以下のように若干面倒である。(興味がある人のみ follow せよ。)

$r_1\to r_2$ により腕が一つの質点にする仕事 W は

$$W=-\int_{r_1}^{r_2}\frac{mv^2}{r}\,dr \qquad (2)$$

なので、

$$\frac{1}{2}mv_2^2=\frac{1}{2}mv_1^2+W \qquad (3)$$

そこで、v_2 を求めるためには (2) 式の積分を実行すればよい。しかし、積分されるべき関数の中に v が含まれており、この v は r の関数である。つまり、$v(r)$ は今求めようとしている結果そのものであり、その答が解らなければ (2) 式の積分も実行できないのである。

そこで、作戦を立て直して地道に考えよう。

任意の r を無限の微少長さ $\Delta r(<0)$ だけ縮めて $r\to r+\Delta r$ とする時に腕がなす仕事は、

$$\Delta W=-m\frac{v^2}{r}\Delta r$$

である。(r を縮める時に ΔW が正なので、マイナス符号がつく。(2) 式のマイナスも同様。) この際、粒子 1 ヶの運動エネルギー

$$T(r)=\frac{1}{2}mv^2(r) \qquad (4)$$

の増大分 ΔT は ΔW に等しい筈だから、

$$\Delta T = -m\frac{v^2}{r}\Delta r$$

の筈である。つまり、

$$\begin{aligned} \Delta T &= -2T\frac{\Delta r}{r} \\ \text{または} \qquad \frac{\Delta T}{T} &= -2\frac{\Delta r}{r} \end{aligned}$$

ここで、(4) 式より T は r の関数だから、両方を $r_1 \to r_2$ で積分することができる。

$$\int_{r_1}^{r_2} \frac{1}{T}dT = -2\int_{r_1}^{r_2} \frac{1}{r}dr$$

一般に $\int \frac{1}{x}dx = \ln x$ なので、

$$\begin{aligned} [\ln T]_{r_1}^{r_2} &= -2\,[\ln r]_{r_1}^{r_2} \\ \ln\left\{\frac{T(r_2)}{T(r_1)}\right\} &= 2\ln\left(\frac{r_1}{r_2}\right) \\ \ln\left(\frac{T_2}{T_1}\right) &= \ln\left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2 \end{aligned}$$

従って、

$$\frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2$$

(4) 式より

$$\frac{v_2^2}{v_1^2} = \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2$$

従って、

$$\boxed{v_2 = \left(\frac{r_1}{r_2}\right)v_1}$$

または、$v = r\omega$ より

$$\boxed{\omega_2 = \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2\omega_1} \qquad (5)$$

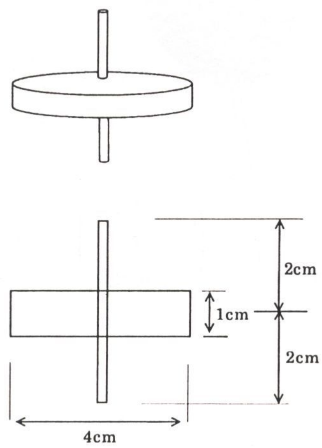
このように、(1) 式のように (r_1/r_2) ではなく、$(r_1/r_2)^2$ に比例して増大するのである。

以上のように、(5) 式を導くのは結構面倒である。しかし、これからやるように、「角運動量」の概念を導入するともっと簡単に (5) が導けるのである。（後でわかる。）

力 学 問 題 (No.6)

6/1 2005（小宮山）

25. 密度が単位体積あたり $1g/cm^3$、で厚さが $1cm$ の一様な円板に長さ $4cm$ の心棒を通してコマを作った。円板は心棒の中心位置にある。心棒の太さや質量を無視する。



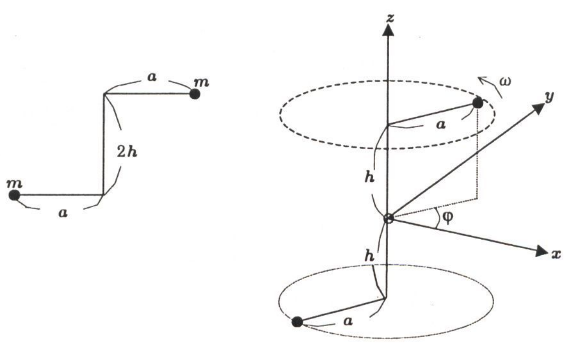
(1) コマの心棒まわりの慣性モーメントの値を求めよ。単位を忘れるな。

(2) このコマを毎秒 30 回転させた時の L_G の値を求めよ。単位を忘れるな。

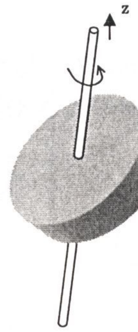
(3) 上問 (2) の時に歳差運動の回転数はいくらか？(問題 22 の結果を使え。)

(4) コマの円板の厚みを $\frac{1}{4}$、直径を 2 培にした時（質量は同じ。)、I と L_G、及び歳差運動の回転数はどうなるか？

26. 質量 m の二つの質点が長さ a の腕に取り付けられており、腕は長さ $2h$ の軸に直角かつ互いに反対側になるよう取り付けられている。軸と腕は変形せず質量はなしとする。軸の中点を座標原点に置き、軸の方向を z 軸に選ぶ。この質点系を軸のまわりに図のように角速度 ω で回転させるとき、原点のまわりの角運動量の x, y, z 成分をそれぞれ求めよ。ただし、$t = 0$ で $\varphi_{(0)} = 0$ とする。



27. 円板の中心を回転軸が斜めに貫いている。前問 26 の結果をより一般的に考えることにより、この円板を回転軸（z 軸）のまわりに回転させる時、角運動量 $\vec{L}$ が z 方向を向かないことを納得せよ。



力 学 解 答 (No.5)

6/1 2005（小宮山）

17. 一つの質点による $\vec{L}$ は

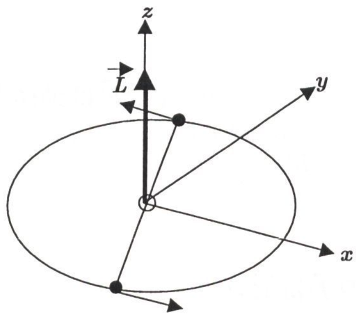
$$\vec{L}_1 = \vec{r} \times m\vec{v}$$

$\vec{L}_1$ の向きは $+z$ 方向

$$|\vec{L}_1| = rmv = mr^2\omega \quad (\omega = v/r)$$

二つとも $\vec{L}$ は同じなので

$$\vec{L} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2rmv \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2mr^2\omega \end{pmatrix}$$



18.

(1)$\vec{L} = \vec{L}_0 + \vec{L}_G$

$$\vec{L}_0 = \vec{R} \times 2m\vec{v}_G \quad (\text{重心の原点まわり})$$

点 G ある $2m$ が ω_2 で時計廻りに回転しているので、
$\vec{L}_0$ の向きは $-z$ 方向で

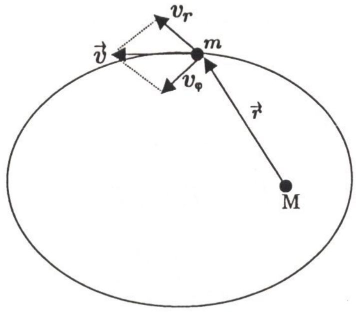
$$|\vec{L}_o| = 2mR^2\omega_2$$

$\vec{L}_G$ は重心のまわりの角運動量で、問 17 の答と同じ。
従って、

$$\begin{aligned} \vec{L} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2mR^2\omega_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2m(r^2\omega_1 - R^2\omega_2) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

(2) $r^2\omega_1 = R^2\omega_2$

19.



M のまわりに m がもつ $\vec{L}$ は

$$\begin{aligned} \vec{L} &= \vec{r} \times m\vec{v} \\ |\vec{L}| &= rmv_\varphi \\ \dot{\vec{L}} &= \vec{r} \times \vec{F}^{(e)} = 0 \end{aligned}$$

$\uparrow$

$\vec{F}$ は動径方向の引力で $\vec{r}$ と平行。

$\Rightarrow$ $\vec{L}$ は保存する。つまり $rv_\varphi =$ 一定。

20. 最初、（車輪）＋（人間）の合成量の $\vec{L}$ はゼロ。

次に車輪が

$$\vec{L}_{車} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ +L \end{pmatrix}$$

を持つが、（車輪）＋（人間）に対して外力は働いていないので車輪を廻した力は内部力。従って、$\vec{L}$ は保存するので $\vec{L} = 0$ のまま。

そのため

$$\vec{L} = \vec{L}車 + \vec{L}_{人} = 0$$

となるために、人間は時計廻りに廻り始める。

21. 「右ネジ」を考慮して、$\vec{N}_1, \vec{N}_2$ ともに向きは $+z$ 軸。

大きさは $rF\sin\theta$ を考慮して。

$$\vec{N}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ rF \end{pmatrix}, \quad \vec{N}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ rF/2 \end{pmatrix}$$

22. (1),(2) をまとめる。コマの軸が xy 面に接する点を O とする。

$$\begin{cases} \text{原点}\, O\, \text{のまわりの角運動}\vec{L} \\ \text{原点}\, O\, \text{のまわりの力のモーメント}\vec{N} \end{cases}$$

を考える。$\vec{R} \equiv \overrightarrow{OG}$ と書くと、

$$\vec{L} = \vec{R} \times \vec{P} + \vec{L}_G \qquad (1)$$
$$\vec{N} = \vec{R} \times \vec{F}^{(e)} + \vec{N}_G \qquad (2)$$

(1) 式中の $\vec{P}$ は全運動量でありコマの回転による寄与は打ち流し合うのでゼロ。(ゆっくりした歳差運動により実は小さな $\vec{P}$ が生じるが、$\vec{L}_G$ に比べて小さいので無視する。)

(2) 式中の $\vec{F}^{(e)}$ は、G に働く重力 $\vec{F}_1$ と O に働く垂直抗力 $\vec{F}_2 = -\vec{F}_1$ の和であり、$\vec{F}^{(e)} = 0$、従って問の図より明らかに、

$$\vec{L} = \vec{L}_G = L \begin{pmatrix} \cos\theta\ \cos\varphi \\ \cos\theta\ \sin\varphi \\ \sin\theta \end{pmatrix} \qquad (3)$$

$$\vec{N} = \vec{N}_G = \overrightarrow{GO} \times \vec{F}_2 = -\vec{R} \times \vec{F}_2 = Mgh\ \cos\theta \begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix} \qquad (4)$$

ここで、

$$\dot{\vec{L}} = \vec{N} \qquad (5)$$

に従って (3) 式の $\vec{L}$ が時間変化する筈である。複雑な解がいろいろあるかも知れないが、経験により知っている <u>**一様なゆっくりした歳差運動**</u> を想定して「θ は一定」と仮定してみよう。

(5) より

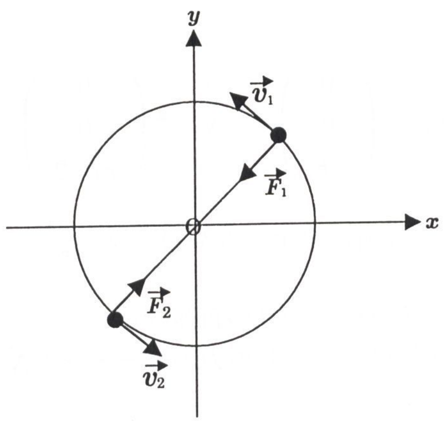
$$L \begin{pmatrix} -(\cos\theta\ \sin\varphi)\dot{\varphi} \\ (\cos\theta\ \cos\theta)\dot{\varphi} \\ 0 \end{pmatrix} = Mgh\cos\theta \begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix}$$

びっくりすることに、

$$\dot{\varphi} = Mgh/L$$

ならば各成分が全て等しい !!

つまり、θ が一定のまま、コマの軸は φ が増大する向き(反時計まわり)に各速度 $\omega_{\text{歳差}} = \dot{\varphi} = Mgh/L$ で歳差運動するのである。コマ自身の回転が弱い (L が小さい) 程、歳差運動の角速度 $\omega_{\text{歳差}}$ (回転数) が高まる。これは、諸君のコマについての経験に合致するだろう。



23. 中心向きの力　$\vec{F}_1, \vec{F}_2$ は大きさが等しく同一線上にあって向きが逆なので、力のモーメントは発生しない。つまり $\vec{N} = 0$

    $\dot{\vec{L}} = 0$ なので角運動量は r を変化させても不変。

    問 17 より

$$\vec{L} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2mr^2\omega \end{pmatrix} \quad \text{が不変なので}$$

$$r_1^2\omega_1 = r_2^2\omega_2$$

    問 16 と同じ答が得られた。

24. 解答は参考書をみよ。