力学講義目次［担当　小宮山 進］　　　　　　　　　　　　　　　2005年夏学期

参考書：サイエンス社　「力学」　阿部龍蔵

講義目次

Ⅰ　力学の法則（第１から第４法則まで）

Ⅱ　万有引力

　１）放物運動

　２）惑星の運動（数値計算の方法）

　３）カオス

Ⅲ　エネルギーの保存

　１）運動方程式の積分

　２）保存力　F

　３）位置エネルギー　U

　４）UとFの関係

Ⅳ　極座標による運動の記述

　１）２次元極座標表示

　２）等速円運動

　３）単振り子の運動

　４）惑星の運動

Ⅴ　質点系の運動

　１）運動量

　２）角運動量 L

　　a) 一つの質点

　　b) 質点系

　　c) 力のモーメント

　　　各運動量が従う運動方程式

Ⅵ　剛体の力学

　１）固体軸の周りの剛体の回転

　２）剛体の慣性モーメント

　３）一般の角運動量の３次元成分

　４）運動エネルギー

Ⅶ　線形微分方程式

　１）複素指数関数

　２）単振動

　３）強制振動

　４）抵抗のある場合の強制振動

　５）共振回路

Ⅷ　ラグランジュ方程式

Ⅸ　ハミルトンの正準方程式

Ⅹ　座標の変換

　１）ガリレー変換

　２）回転座標系

力 学 問 題

4/13/2005（小宮山進）

1. 運動している質点がある。時刻 t でのその質点の位置ベクトルが直交座標系 $\vec{r}(t) = (x,y,z) = (3t, 2t^2+t, -t)$ であたえられるとき、その質点の時刻 t における速度ベクトル $\vec{v}(t)$ と加速度ベクトル $\vec{a}(t)$ を求めよ。

2. c を時間により変化する数、$\vec{h}$ を時間により変化するベクトルとする時、

$$\frac{d}{dt}(c\vec{h}) = \dot{c}\vec{h} + c\dot{\vec{h}}$$

を示せ。ただし、$\vec{h} = (h_x, h_y, h_z)$ とする。

3. $\vec{a}, \vec{b}$ を時間によって変化するベクトルとする。

$$\frac{d}{dt}(\vec{a}\cdot\vec{b}) = \dot{\vec{a}}\cdot\vec{b} + \vec{a}\cdot\dot{\vec{b}} \quad \text{を示せ。}$$

4. $\vec{v}$ を速度ベクトル、$|\vec{v}| = v$ とする時、

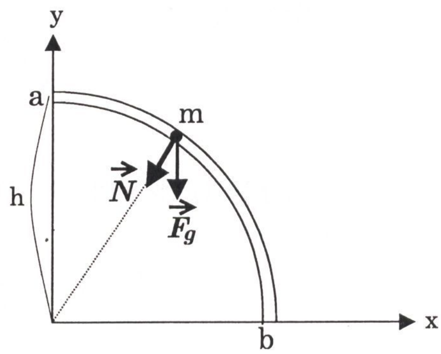
$$\frac{d}{dt}(v^2) = 2\vec{v}\cdot\ddot{\vec{r}} \quad \text{を示せ。}$$

力 学 問 題

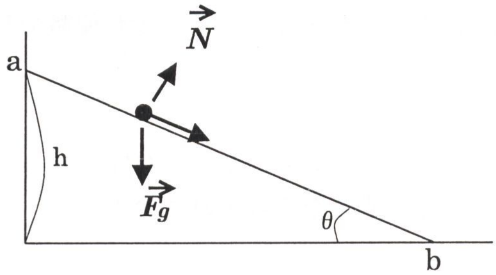
4/20/2005（小宮山）

5.

半径 h の円弧状に曲げられた細いパイプ中を質点 m が点 a から点 b まですべり落ちる時、力 $\vec{F}$ が質点に対してなす仕事を求めよ。ただし、
(i) パイプと質点との間に摩擦は働かず、
(ii) またパイプは充分に細くて質点 m との間に隙間はない。
(iii) 重力 $\vec{F}_g$ は $-y$ 方向に働き、大きさは mg である。



6. 摩擦のない角度 θ の斜面を高さ h の点 a から高さゼロの点 b へ質点 m がすべり落ちる時、力 $\vec{F}$ が質点になす仕事を求めよ。



7. 以下の全てが保存力であることを確かめよ。それぞれポテンシャルを求めよ。

(1) $\vec{F} = (c_1, c_2, c_3)$ $c_1 \sim c_3$ は定数。

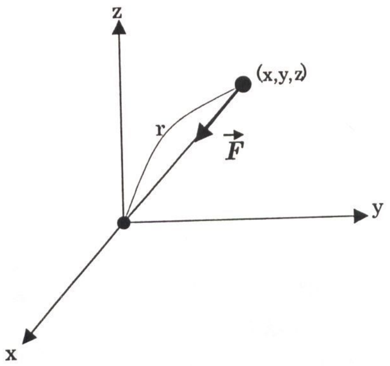
(2) $\vec{F} = (x, 0, 0)$

(3) $\vec{F} = (y, x, 0)$

8. $\vec{F} = (y, 0, 0)$ は保存力でないことを示せ。

9.

点電荷間のクーロン力や質点間の万有引力は、2点間を結ぶ動径方向を向き、大きさは2点間の距離の2乗に反比例する。2点のうちの一方を直交座標の原点において他方の点の位置を (x, y, z) で現す。(引力の場合を考えよ。)



(1) これらの力の x, y, z 成分が（定数を別にして）

$$\vec{F} = (\frac{-x}{r^3}, \frac{-y}{r^3}, \frac{-z}{r^3})$$

と現されることを示せ。ただし、

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

(2)　クーロン力や万有引力は真の力だから保存力の筈である。確かめよ。つまり、ポテンシャルを求めよ。

ヒント；ためしに $U(x, y, z) = \frac{1}{r}$ を x, y, z でそれぞれ偏微分してみよ。

10. 点 (x, y, z) に置かれた質点のポテンシャルエネルギーが $U(x, y, z) = x^2yz^3 + xyz$ で与えられる時、質点に働く力 $\vec{F}(x, y, z)$ の x, y, z 成分をそれぞれ求めよ。

力 学 解 答

4/20/2005（小宮山）

1. $\vec{v}(t) = (3, 4t+1, -1), \quad \vec{a}(t) = (0, 4, 0)$

2.

$$
\begin{aligned}
c\vec{h} &= (ch_x, ch_y, ch_z) \\
\frac{d(c\vec{h})}{dt} &= \left(\frac{d(ch_x)}{dt}, \frac{d(ch_y)}{dt}, \frac{d(ch_z)}{dt}\right) \\
&= (\dot{c}h_x + d\dot{h}_x, \dot{c}h_y + c\dot{h}_y, \dot{c}h_z + c\dot{h}_z) \\
&= \dot{c}(h_x, h_y, h_z) + c(\dot{h}_x, \dot{h}_y, \dot{h}_z) \\
&= \dot{c}\vec{h} + c\dot{\vec{h}}
\end{aligned}
$$

3.

$$
\begin{aligned}
\vec{a}\cdot\vec{b} &= a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z \quad \text{より} \\
\frac{d}{dt}(\vec{a}\cdot\vec{b}) &= \dot{a}_x b_x + a_x \dot{b}_x + \dot{a}_y b_y + a_y \dot{b}_y + \dot{a}_z b_z + a_z \dot{b}_z \\
&= \dot{\vec{a}}\cdot\vec{b} + \vec{a}\cdot\dot{\vec{b}}
\end{aligned}
$$

4. 解法 1. $\frac{d}{dt}(v^2) = 2v\dot{v}$ ここで、

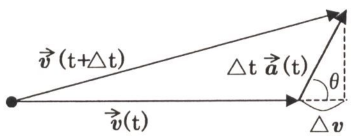
$$\dot{v} = \ddot{r}$$

従って

$$\frac{d}{dt}(v^2) = 2v\dot{v} = 2v\ddot{r}$$

とした後、「きっと　$v\ddot{r} = \vec{v}\cdot\ddot{\vec{r}}$　なのだろう」などといい加減に考えてお茶を濁すのは良くない。ここでの $\ddot{r}$ は「$\vec{v}$ の絶対値の時間変化；$d|\vec{v}|/dt$」なのだが、この式では「$\vec{v}$ の時間変化の絶対値；$|d\vec{v}/dt|$」との区別が曖昧だからだ。これら二つの量は異なる。（例えば、等速円運動の際、$d|\vec{v}|/dt = 0$ だが $|d\vec{v}/dt| \neq 0$ である。）

上の式で $2v\dot{v}$ までは恥じることなく正しい。$\dot{v}$ がどんなものかを、下図のように $\vec{v}(t)$ が $\vec{v}(t+\triangle t)$ へ変化することをきちんと考えることで導こう。



時刻 t における加速度ベクトルが $\vec{a}(t)$ のとき、$|\vec{v}|$ の $\triangle t$ 秒間での増大分

$$\triangle v = |\vec{v}(t+\triangle t)| - |\vec{v}(t)|$$

は、図より

$$\triangle v = \triangle t|\vec{a}(t)|\cos\theta = \triangle t\frac{\vec{v}\cdot\vec{a}}{v}$$

である。従って、

$$\dot{v} = \frac{|\vec{v}(t+\triangle t)| - |\vec{v}(t)|}{\triangle t} = \frac{\vec{v}\cdot\vec{a}}{v}$$

従って　$v\dot{v} = \vec{v}\cdot\vec{a} = \vec{v}\cdot\ddot{\vec{r}}$　なのである。

解法 2.：もっと簡単にやるには、$v^2 = \vec{v}\cdot\vec{v}$ に注意して、問 3 を適用すればよい。

教訓；ただの数（スカラー）とベクトルをきちんと区別してまじめに考えよ。

力 学 解 答

4/20/2005（小宮山進）

5.　$\int_{a点}^{b点} \vec{F}\cdot d\vec{r}$　を円周に沿って計算する。

パイプが質点におよぼす力 $\vec{N}$ は摩擦がないので接線方向 $d\vec{r}$ に垂直である。従って、

$$\begin{aligned}\vec{F} &= (\vec{F_g}+\vec{N})\cdot d\vec{r}\\ &= \vec{F_g}\cdot d\vec{r}\end{aligned}$$

従って以下では $\vec{F_g}$ のみ考える。

解法１.

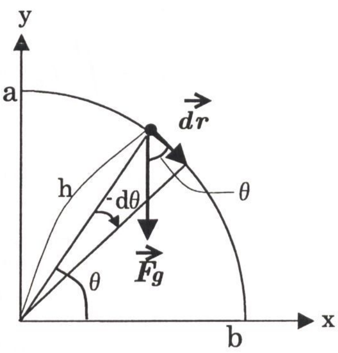
右図において

$\vec{F_g}$ と $d\vec{r}$ は角 θ をなすので、

$$\vec{F}\cdot d\vec{r} = |\vec{F_g}||d\vec{r}|\cos\theta$$

ここで、

$$|\vec{F_g}| = mg$$



また、θ が微少角 $d\theta$ 変化する時、質点は円周上を $dr = hd\theta$ だけ移動することに注意、ただし、$a\to b$ に沿って移動する時の変化の方向で dr を正に取るので、それは θ が減少（$d\theta<0$）する方向に相当する。つまり、

$$\begin{aligned}|d\vec{r}| &= dr = -hd\theta\\ \int_{a点}^{b点}\vec{F}\cdot d\vec{r} &= \int_{a点}^{b点} mg(-h)\cos\theta d\theta\\ &= -mgh\int_{a点}^{b点}\cos\theta d\theta\\ &= -mgh[\sin\theta]_{a点}^{b点}\\ b点は\theta &= 0, a点は\theta=\frac{\pi}{2}なので、\\ &= \underline{mgh}\end{aligned}$$

解法２.

$$\int_{a点}^{b点}\vec{F}\cdot d\vec{r} \equiv \lim_{N\to\infty}\left\{\sum_{i=1}^{N}(\vec{F_i}\cdot\triangle\vec{r_i})\right\}$$

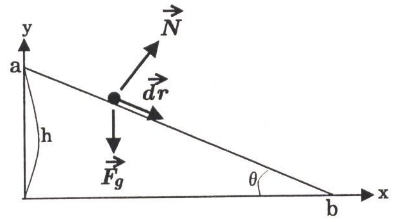
を思い出すと、力を x,y 成分に分けて、

$$\begin{aligned}&= \lim_{N\to\infty}\left\{\sum_{i=1}^{N}(F_{xi}\triangle x_i + F_{yi}\triangle y_i)\right\}\\ &= \int_a^b F_x dx + \int_a^b F_y dy\end{aligned}$$

と書ける。$F_x = 0, F_y = -mg$ より

$$
\begin{aligned}
&= -mg\int_a^b dy \\
&= -mg[y]_{a\,点}^{b\,点} \\
&= mgh
\end{aligned}
$$

6.



問 3 の解法 2. より

$$\int_a^b \vec{F}\cdot\vec{dr} = \int_a^b \vec{F}_g\cdot\vec{dr} = \int_a^b F_x dx + \int_a^b F_y dy$$

$$
\begin{aligned}
\vec{F}_g &= (0,\ -mg) \quad より \\
&= \int_a^b (-mg)dy \\
&= -mg[y]_a^b \\
&= \underline{mgh}
\end{aligned}
$$

7. $\vec{F} = -\vec{\nabla}U$ となるポテンシャル U が求まれば良いのである。

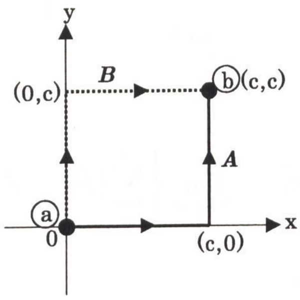
(1) $U(r) = -c_1x - c_2y - c_3z$

(2) $U(r) = -\frac{1}{2}x^2$

(3) $U(r) = -xy$

8. $F_x = y$ より $U(r)$ は $-xy$ の項に含むべきだが、そうすると、その項は $-\frac{\partial U}{\partial y} = x + \cdots$ より $F_y = x + \cdots$ を与えてしまうので、$F_y = 0$ にならない。だから多分保存力ではない。

確かめるためには、「異なる経路で仕事を計算すると別の値を与えてしまう」という例を一つ示せばよい。例えば $z = 0$ の xy 平面上で a 点 $(0,0) \to b$ 点 (c,c) とする時下図の経路 A, B で仕事を考える。

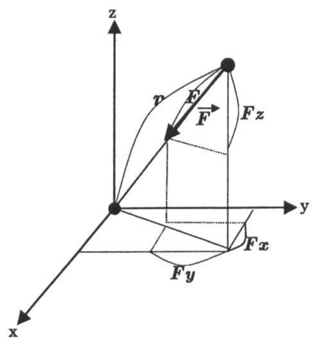


$$
\begin{aligned}
\int_{a\atop A}^b \vec{F}\cdot\vec{dr} &= 0 \\
\int_{a\atop B}^b \vec{F}\cdot\vec{dr} &= c^2
\end{aligned}
$$

となることを示せ。このように確かに異なるので保存力ではない。

9.

(1) 点 (x,y,z) における力 $\vec{F}$ は、その点の位置ベクトル（原点からその点に向けて張ったベクトル）$\vec{r}$ に平行で向きが反対である。ところが位置ベクトルは (x,y,z) 成分で書けば $\vec{r}=(x,y,z)$ である。従って $\vec{F}=(F_x,F_y,F_z)$ と書くとき、$F_x:F_y:F_z=(-x):(-y):(-z)$ でなければならない。従って、$\vec{F}=-c(x,y.z)$ と書ける。つまり、



$$
\begin{aligned}
|\vec{F}| &= c\sqrt{x^2+y^2+z^2} \\
&= cr
\end{aligned}
$$

である。

ここで、$|\vec{F}|$ が $\frac{1}{r^2}$ に比例しなければならないので、定数を別にして、

$$c = r^{-3}$$

と求まる。つまり、

$$\vec{F} = -(\frac{x}{r^3},\frac{y}{r^3},\frac{z}{r^3})$$

(2)

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x}(\frac{1}{r}) &= \frac{\partial}{\partial x}(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{1}{2}} \\
&= \frac{1}{2}(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{3}{2}}2x \\
&= \frac{x}{r^3}
\end{aligned}
$$

以下同様に

$$\frac{\partial}{\partial y}(\frac{1}{r}) = \frac{y}{r^3} \quad , \quad \frac{\partial}{\partial z}(\frac{1}{r}) = \frac{z}{r^3}$$

10.

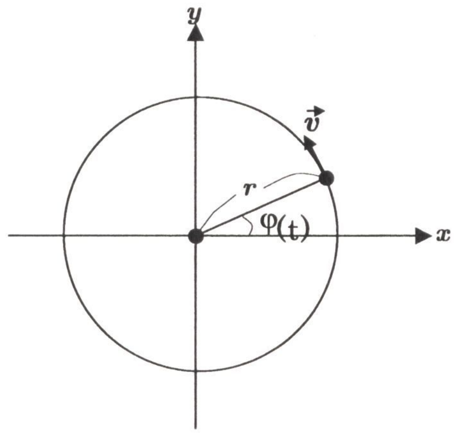
$$\vec{F} = (F_x,F_y,F_z)$$

$$
\begin{aligned}
F_x &= -\frac{\partial U}{\partial x} = -2xyz^3 - yz \\
F_y &= -\frac{\partial U}{\partial y} = -x^2z^3 - xz \\
F_z &= -\frac{\partial U}{\partial y} = -3x^2yz^2 - xy
\end{aligned}
$$

力 学 問 題

5/11 2005（小宮山）

11. 角速度 ω で等速円運動する質点の位置を回転円の中心点からの距離 r と x 軸からの偏角 φ で現す。



(1) 速度ベクトル $\vec{v}(t)$ と加速度ベクトル $\vec{a}(t)$ を極座標表示せよ。

(2) 運動方程式 $m\vec{a} = \vec{F}$ を極座標表示で書き下せ。

12. （参考書 *p.14 の問 5）半径 50cm の円周上を等速円運動している質点が 1 秒間に 8 回転する。次の諸量を求めよ。

(a) 円運動の周期　(b) 角速度　(c) 質点の速さ　(d) 質点の加速度の大きさ

13. （参考書 *p.14 の問 7）平面上を運動する質点の軌道が極座標により、$r = f(\theta)$ で与えられるとする。この質点の速さを v を $f(\theta), f'(\theta), \dot{\theta}$ の関数として求めよ。ただし、$f'(\theta) = df(\theta)/d\theta$ である。

(* 新物理学ライブラリ 2「力学」　阿部龍蔵著　サイエンス社)

力 学 問 題 (No.4)

5/18 2005（小宮山）

14. (参考書 P.85 の問 5) ベクトル積に対して、次の関係が成り立つことを示せ。

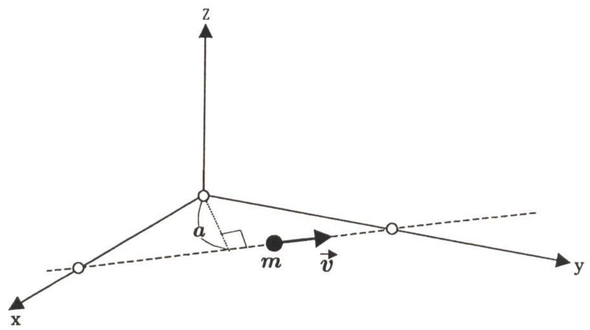
(a)

$$(A+B)\times C = A\times C + B\times C$$
$$A\times(B+C) = A\times B + A\times C$$

(b) x, y, z 軸に沿う単位ベクトルを i, j, k としたとき、

$$i\times j = k, \qquad j\times k = i, \qquad k\times i = j$$

15. xy 平面上 $(z=0)$ に、直線があり、原点からその直線に下ろした垂線の長さは a である。この直線上を図のように等速 $(|\vec{v}| = v = 一定)$ で動く質点 (m) がある。この質点の原点のまわりの角運動量ベクトル $\vec{L}$ を考えよう。



(1) $\vec{L}$ は粒子がどこにいても変化せず一定であり、その向きは $+z$ 軸方向；大きさが amv に等しいことを示せ。

以下、同様のことを (x, y, z) 座標で考えてみる。

(2) $\vec{L}$ の x, y, z 成分を $x, y, \dot{x}, \dot{y}, m$ で書き下せ。

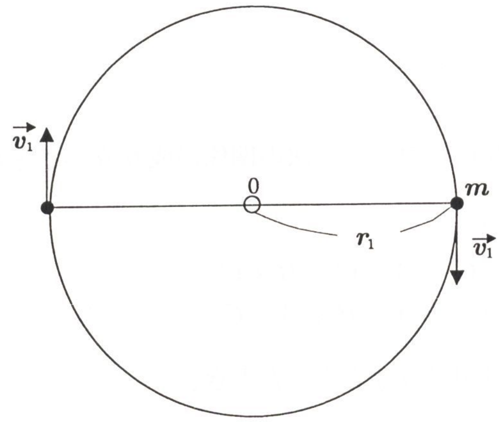
上問 (2) では、まだ質点が等速直線運動することを考慮していない。

(3) 直線の運動を

$$y = -bx + c$$

で表すことにより、(2) の答が (1) の答と同じであることを確かめよ。

16. 質量 m の二つの質点 m を半径 r_1 の円周の反対側に腕で保持し、角速度 $\omega_1 = v_1/r_1$ で回軸させている。



回転中の二つの質点を引き寄せて半径を $r_2(< r_1)$ としたとき、角速度 ω_2 は ω_1 に比べてどうなるか？ ただし、質点と一緒に回転している腕や人体の質量は無視してよい。

力 学 解 答 (No.3)

5/18　2005（小宮山）

11.

(1) 式 (3) より $v_r = \dot{r}, v_\varphi = r\dot{\varphi}$

ここで、題意より $r(t) = r, \quad \varphi(t) = \omega t + c$ (c は定数)

$\dot{r}(t) = 0, \quad \dot{\varphi} = \omega$ より

$$\boxed{v_r = 0, \quad v_\varphi = r\omega}$$

式 (4) より $a_r = \ddot{r} - r(\dot{\varphi})^2, \quad \dot{a}_\varphi = z\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi}$

$\dot{r} = 0, \quad \ddot{r} = 0, \quad \dot{\varphi} = \omega, \quad \ddot{\varphi} = 0$ より

$$\boxed{a_r = -r\omega^2, \quad a_\varphi = 0}$$

(2)

$$\begin{cases} -mr\omega^2 & = F_r \\ 0 & = F_\varphi \end{cases}$$

動径方向 (r 方向) に求心力 $-mr\omega^2$ が働いている。接線方向 (φ 方向) の力はゼロ。

12. （参考書 *p.160 の 5）

(a) $T = 1/f = 1/8 = 0.125s$

(b) $\omega = 2\pi \times 8 = 50.2\ rad/s$

(c) $v = a\omega = 0.5 \times 50.2 = 25.1\ m/s$

(d) 加速度の大きさ α は $\omega^2 \times$ (半径) に等しい。従って、$\alpha = 50.2^2 \times 0.5 = 1260\ m/s^2$。

13. （参考書 *p.161 の 7）質点の x, y 座標は $x = f(\theta)\cos\theta, y = f(\theta)\sin\theta$ で与えられる。これから

$$v_x = \dot{x} = f'(\theta)\cos\theta \cdot \dot{\theta} - f(\theta)\sin\theta \cdot \dot{\theta}$$

$$v_y = \dot{y} = f'(\theta)\sin\theta \cdot \dot{\theta} + f(\theta)\cos\theta \cdot \dot{\theta}$$

ゆえに

$$v^2 = v_x^2 + v_y^2 = \{f'(\theta)\}^2\dot{\theta}^2 + f^2(\theta)\dot{\theta}^2$$

すなわち

$$v = \dot{\theta}\sqrt{\{f'(\theta)\}^2 + f^2(\theta)}$$

（* 新物理学ライブラリ 2「力学」　阿部龍蔵著　サイエンス社）