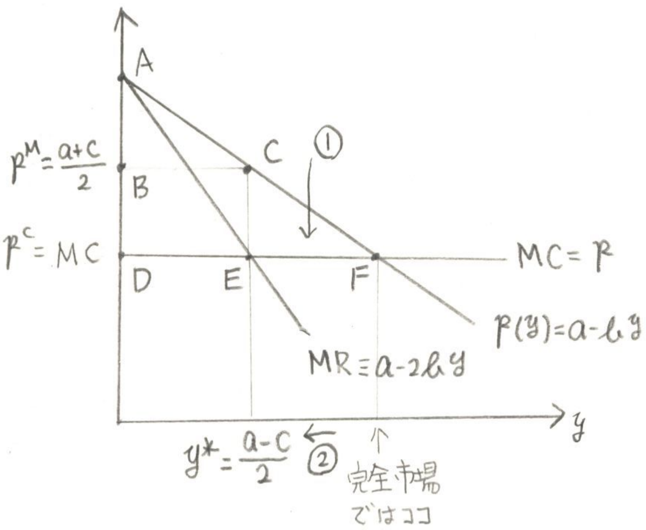
前ページの例を考える



完全競争では $CS = \triangle ADF$ だったのが
独占では $CS = \triangle ABC$ と小さくなる。
企業は独占利潤(Monopolists Revenue)を長方形 BCED だけ得る。
よって$\triangle CEF$はムダになってしまっている。

独占のいけないところは
① 消費者余剰であるべきところがムダになる
② 生産量が下がってしまう

式で考えると

$$\underset{\text{社会厚生水準}}{W} \equiv TS = \underbrace{\int_0^{y^*} u'(y(p))\,dy - p^M y^*}_{CS} \underbrace{+ p^M y^* - \int_0^{y^*} c'(y)\,dy}_{PS} = u(y) - c(y)$$

$$\frac{\partial W}{\partial y} = u'(y) - c'(y) = 0$$ このときWが最大

ここでMonopolist の F.O.C は

$$p'(y)y + p(y) - c'(y) = 0$$

需要関数について $p(y) = u'(y)$ (P13参照)であるから

$$\underbrace{u'(y) - c'(y)}_{\frac{\partial W}{\partial y}} = -p'(y)y > 0 \quad (\because p'(y) < 0)$$

よって独占のときyが増えればWも増える。
したがって独占の生産量は社会的には低いことがわかる。

◦ Game Theory → 意志決定の学問

共有知識 (Common knowledge)

全てのplayerは { Player / Strategy(戦略) / Pay off(利得) } を知っている。(共有している)

さらにこの事実も知っている。

○囚人のジレンマ

		Column 黙否	自白
Row	黙否	-1, -1	-3, 0
	自白	0, -3	-2, -2

← 利得行列という。

Players {R, C} (Row, Column)
Strategies {黙否, 自由}
Payoff 左を見る

$\boxed{\text{Rの人のPayoffは左側、Cの人のPayoffは右側に書く}}$

支配戦略

→ Playerにとってある戦略の利得が他のPlayerの選択しうる全ての戦略に伴う利得より高いときこの戦略を支配戦略という。

(上の例ではRはCが黙否を選んでも自白を選んでも自分は自白を選択した方が得をする。よって支配戦略は自白)

支配戦略均衡

→ 全てのPlayerが支配戦略を選択した状態のこと。(上の例では(自白, 自白))

○ナッシュ均衡 (2 Players Case)

Player R, Cについて

$$\begin{cases} U_r(r^*, c^*) \geqq U_r(r, c^*) \\ U_c(r^*, c^*) \geqq U_c(r^*, c) \end{cases}$$

が成り立つとき, (r^*, c^*)を
ナッシュ均衡(Nash Equilibrium)とよぶ。
支配戦略均衡はナッシュ均衡のひとつである。

(U_r : Rの利得(Utility)
U_c : Cの利得
r : r^*以外の全ての戦略
c : c^*以外の全ての戦略)

○複占

{ Cournot Competition (クールノー競争) …. 生産量 : y_1, y_2を設定し競争する
Bertrand Competition (ベルトラン競争) …. 価格 : p_1, p_2を設定し競争する

○Cournot Competition

同様の製品を生産し競争する2つの企業を考える。(企業1,2)
需要は $p(Y) \equiv p(y_1+y_2)$ で与えられ,
生産コストはそれぞれ $C_1(y_1)$ $C_1'>0$ $C_1''>0$ とする。
$C_2(y_2)$ $C_2'>0$ $C_2''>0$

企業の最大化問題は

「$\max_{y_i} \underbrace{p(Y)y_i - C_i(y_i)}_{\hookrightarrow \pi_i}$」 $i=1,2$

F.O.C $\dfrac{\partial \pi_i}{\partial y_i} = p'(Y)y_i + p(Y) - C_i'(y_i) = 0 \quad i=1,2$ ——— ①

S.O.C $\dfrac{\partial^2 \pi_i}{\partial y_i^2} = 2p'(Y) + p''(Y)y_i - C_i''(y_i) \leq 0 \quad i=1,2$ ——— ② (最大値を求めるので上に凸)

均衡では①②が企業1,2について成立

$Y = y_1 + y_2$ であるので ①②はお互いの生産量に依存する

⇒ 企業1の最適生産量は企業2の最適生産量の関数である。

⇒ $y_1^* = y_1^*(y_2^*)$, $y_2^* = y_2^*(y_1^*)$

⇒ $y_1^*(y_2^*)$ はどのような関数か？

$y_1 = y_1(y_2)$ と考えて

$$\frac{\partial}{\partial y_1}\pi_1(y_1(y_2), y_2) = 0 \quad \text{— F.O.C}$$

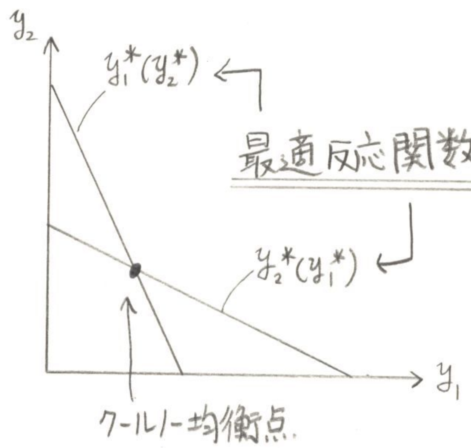
$\dfrac{dy_1}{dy_2}$ が知りたいので F.O.C を全微分して

$$\frac{\partial^2 \pi_1}{\partial y_1^2}dy_1 + \frac{\partial^2 \pi_1}{\partial y_1 \partial y_2}dy_2 = 0 \Rightarrow \frac{dy_1}{dy_2} = -\frac{\dfrac{\partial^2 \pi_1}{\partial y_1 \partial y_2}}{\dfrac{\partial^2 \pi_1}{\partial y_1^2}}$$

S.O.C < 0

⇒ $\dfrac{dy_1}{dy_2}$ の正負は $\dfrac{\partial^2 \pi_1}{\partial y_1 \partial y_2}$ の正負と一致する

$\dfrac{\partial^2 \pi_1}{\partial y_1 \partial y_2} = p'(Y) + p''(Y)y_1 \leq 0$ if $p' < 0$ (右下がり) $p'' \leq 0$ (一般的)



例)

$p(Y) = a - b(y_1 + y_2)$

$C_1(y_1) = cy_1$

$C_2(y_2) = cy_2$ とすると

$\pi_1 = [a - b(y_1 + y_2)]y_1 - cy_1$

$\dfrac{\partial \pi_1}{\partial y_1} = a - 2by_1 - by_2 - c = 0 \Leftrightarrow y_1 = \dfrac{a - by_2 - c}{2b} = \dfrac{a-c}{2b} - \dfrac{1}{2}y_2$ ——— ①

最適反応関数

同様に

$\dfrac{\partial \pi_2}{\partial y_2} = a - 2by_2 - by_1 - c = 0 \Leftrightarrow y_2 = \dfrac{a-c}{2b} - \dfrac{1}{2}y_1$ ——— ②

①②より

$$y_1^* = y_2^* = \frac{a-c}{3b}$$

企業が2つ以上の場合を考える。(寡占)

簡略のため $C_i(y_i)=c_i y_i,\ \forall y_i$ とする。

このとき $MC \equiv C'_i(y_i)=c$ (一定) とする。

企業の一階条件は $p(Y)+p'(Y)y_i=c \quad \left(Y=\sum_{i=1}^{n} y_i\right)$

$$p(Y)\left[1+\frac{dp}{dY}\frac{y_i}{p(Y)}\right]=c \qquad s_i=\frac{y_i}{Y} \text{ とおくと } (s_i \equiv \text{Market Share})$$

$$\Rightarrow p(Y)\left[1+\frac{dp}{dY}\frac{Y}{p}s_i\right]=c \qquad \Rightarrow p(Y)\left[1+\frac{s_i}{\varepsilon}\right]=c$$

$\varepsilon \equiv \frac{dY}{dp}\frac{p}{Y}$ (弾力性)

ここで仮定より全企業でMCが等しいので生産量が等しくなる。$(y_1=y_2=y_3=\cdots\cdots=y_n)$

$$\Rightarrow s_i=\frac{y_i}{ny_i}=\frac{1}{n},\ \forall i$$

よって $p(Y)\left[1+\frac{1}{n\varepsilon}\right]=c$ となり $n\longrightarrow\infty$ で $p(Y)=c\equiv MC$

($n\to\infty$で完全競争に近づく)

○ Bertrand Competition (価格を設定する)

異なる2つの企業が価格を設定する。次の2つの場合を考える。

① 同一製品 ← どこのものもいっしょ

② 不完全代替品 ← 好みがある

① 同一製品の場合

簡略のため 生産コストが同一で $C_1(y_1)=C_2(y_2)=cy_i \quad i=1,2$

企業1の製品の需要を考える　D≡総需要

$$d_1(p_1,p_2)=\begin{cases} D(p_1) & \text{if } p_1<p_2 \\ \frac{D(p_1)}{2} & \text{if } p_1=p_2 \\ 0 & \text{if } p_1>p_2 \end{cases}$$

消費者はみんな少しでも安い方のものを買う

$p_1<p_2$ならば企業2が価格を $p'_2<p_1$ となるように設定しなおす。

そうすると企業1が価格を $p'_1<p'_2$ となるように設定しなおす。このように

$MC=c=p_1=p_2$ となるまで競争が続く。

② 不完全代替品の場合

y_1, y_2 の需要は p_1, p_2 の関数であるが、これを

$y_1(p_1,p_2)\equiv y_1=a_1-b_1p_1+cp_2 \qquad a_i, b_i, c>0\ (i=1,2)$

$y_2(p_1,p_2)\equiv y_2=a_2+cp_1-b_2p_2$ 　　とする。(a, b, cで好みを表現)

簡略の為 $C_i(y_i)=0$とする

企業1の問題は

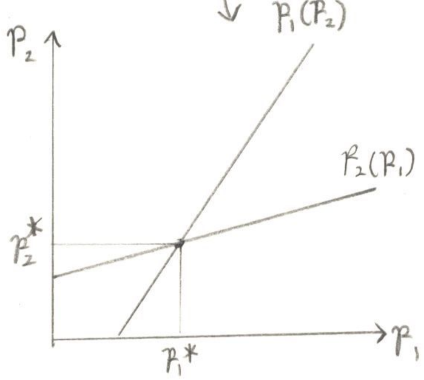
「$\underset{p_1}{Max}\,(a_1-b_1p_1+cp_2)p_1-\overset{0}{\cancel{C_1(y_1)}}$」

F.O.C　$a_1-2b_1p_1+cp_2=0 \Rightarrow p_1=\dfrac{a_1+cp_2}{2b_1}$ ←最適反応関数

企業2も同様に

「$\underset{p_2}{Max}\,(a_2+cp_1-b_2p_2)p_2$」を解いて $p_2=\dfrac{a_2+cp_1}{2b_2}$ ←

クールノーの場合は傾きが負だった



以上より

$$p_1^*=\frac{2a_1b_2+a_2c}{4b_1b_2-c^2},\quad p_2^*=\frac{2a_2b_1+a_1c}{4b_1b_2-c^2}$$

○シュタッケルベルグ(Stackelberg)モデル

企業1,2があり生産量を設定して競争するが企業1が先にy_1を設定し,
企業2はy_1を確認した後にy_2を設定する。(クールノーの応用)

企業1は企業2の行動(y_2)を考慮に入れて最大化問題を解く。

⇒企業2の最適反応関数が知りたい。

企業2の問題は(y_1はわかっている)

「$\underset{y_2}{Max}\,P(Y)y_2-C_2(y_2)$」　$(Y=y_1+y_2)$

F.O.C　$P(Y)+P'(Y)y_2=C'(y_2)$ ——①　$\Rightarrow y_2^*=y_2(y_1)$ ←最適反応関数

企業1は $y_2\equiv y_2(y_1)$を想定する

「$\underset{y_1}{Max}\,P(\underbrace{y_1+y_2(y_1)}_{Y})y_1-C_1(y_1)$」

F.O.C　$P(y_1+y_2(y_1))y_1+P'(Y)\left[1+\dfrac{dy_2}{dy_1}\right]y_1=C_1'(y_1)$ ——②

均衡は①②を同時に満たすy_1, y_2で与えられる。

例) $P(y_1+y_2)=a-b(y_1+y_2)$　$a,b>0$, $C_1(y_1)=cy_1$, $C_2(y_2)=cy_2$

企業2　クールノーの例と同じ式

「$\underset{y_2}{Max}\,[a-b(y_1+y_2)]y_2-cy_2$」

F.O.C $a-by_1-2by_2=c$

$y_2=\dfrac{a-c-by_1}{2b}$ ——①

企業1

「$\underset{y_1}{Max}\,[a-b(y_1+y_2)]y_1-cy_1$　s.t. $y_2=\dfrac{a-c-by_1}{2b}$」

F.O.C $\frac{1}{2}(a-c-2by_1)=0$ (y_2は代入した)

$\therefore y_1^*=\dfrac{a-c}{2b}$, $y_2^*=\dfrac{a-c}{4b}$

クールノーのときも考えると

$$y_1 = y_2 = \frac{a-c}{3b} < \frac{a-c}{2b} = y_1^* > \frac{a-c}{4b} = y_2^*$$

利潤 π を比べてみると（それぞれ π に y^* を代入）

$$\underset{\text{企業2}}{\frac{(a-b)^2}{16b}} < \underset{\text{クールノーの競争}}{\frac{(a-b)^2}{9b}} < \underset{\text{企業1}}{\frac{(a-b)^2}{8b}}$$

先に生産量を決めた方が有利。

○談合（Collusion）

企業1と2が競争しないで共同で利潤を追求する場合

「$\max_{y_1, y_2} \underbrace{p(y_1+y_2)[y_1+y_2] - C_1(y_1) - C_2(y_2)}_{\pi_1+\pi_2 \equiv \pi}$」

F.O.C $\frac{\partial \pi}{\partial y_1} = 0 \iff p(y_1+y_2) + p'(y_1+y_2)[y_1+y_2] = C_1'(y_1)$

$\frac{\partial \pi}{\partial y_2} = 0 \iff p(y_1+y_2) + p'(y_1+y_2)[y_1+y_2] = C_2'(y_2)$

2式の左辺は等しいので $\underline{\underline{C_1'(y_1) = C_2'(y_2)}}$

⇒両者のMCが等しくなるような生産量で談合が成立するはず。

代入

ところが

$\pi_1 = p(y_1+y_2)y_1 - C_1(y_1)$ であるので

談合案のF.O.Cが満たされるとき，$\frac{\partial \pi_1}{\partial y_1} = p'(y_1+y_2)y_1 + p(y_1+y_2) - C_1'(y_1)$

$$= -\underset{p'<0}{p'}(y_1+y_2)y_2 > 0$$

よって企業1だけが談合を破って y_1 を拡大すればもっと大きな利潤を得ることができる。
企業2も同じことを考えるので結局談合は破棄となる。

○談合成立の条件

Model
$$\begin{cases} p = a - b(y_1+y_2) \\ \left.\begin{aligned} \pi_1 &= py_1 - cy_1 \\ \pi_2 &= py_2 - cy_2 \end{aligned}\right\} MC_1 = MC_2 = c \\ \pi = \pi_1 + \pi_2 \end{cases}$$

⇐前に2回ほどやった例と同じモデル

企業1と2がクールノー競争（お互いが自由に生産量を設定）の結果は，

$$y_1^* = y_2^* = \frac{a-c}{3b} \qquad \pi_1 = \pi_2 = \frac{(a-c)^2}{9b}$$

であった。

談合したとき(約束した均衡)

企業1,2は次の問題を解く。「$\underset{y_1, y_2}{Max}\ \pi$」 ← $\pi = \pi_1 + \pi_2$

$\Rightarrow$ F.O.C $\frac{\partial \pi}{\partial y_1} = a - c - 2b(y_1 + y_2) = 0$

$\frac{\partial \pi}{\partial y_2} = a - c - 2b(y_1 + y_2) = 0$

$MC_1 = MC_2 = c$ なので $y_1^* = y_2^*$ となる。

$\Rightarrow$ F.O.Cは

$$\left. \begin{array}{l} a - c - 4y_1 = 0 \\ a - c - 4y_2 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow y_1^* = y_2^* = \frac{a-c}{4b} \Rightarrow \pi_1 = \pi_2 = \frac{(a-c)^2}{8b} > \frac{(a-c)^2}{9b}$$

⇑ クールノーの競争するよりは談合がまし

くり返しゲームの一戦略

前提: Trigger Strategy (引き金) ⇒ 談合で始める。ただし一度でも約束を破ったらその後はもう二度と談合はせず、競争する。

・有限回くり返しゲーム ⇒ n回くり返したとき、談合は成立しない。

(理由) Backward Inductionによればn回目には約束を守ることはない。

∵「次」がない状況ではその方が π_1, π_2 が高いから。

⇒ n-1回目にも約束を守ることはない。

∵ n回目が守られないとわかっているのならn-1回目も守る必要はない。

⋮

⇒ 1回目にも約束を守ることはない。

・無限回くり返しゲーム

約束を守るか、破るかの判定基準は

守ったときの π ≷ 約束を一度破って競争になったときの π

約束を守ったときの $\pi_1 = \pi_1 + \underbrace{\frac{1}{1+r}\pi_1}_{\text{1回後の割引現在値}} + \underbrace{\left(\frac{1}{1+r}\right)^2 \pi_1}_{\text{2回後の割引現在値}} + \cdots\cdots$ (rは利率)

割引現在値 … 将来得ることができるものを現在の価値におきかえたもの。

(利率が r のとき1年後の利益 π は現在での $\frac{1}{1+r}\pi$ と価値は同じ)

また $\delta = \frac{1}{1+r} < 1$ を割引因子という。

$$PV\ \pi_1 = \frac{(a-c)^2}{8b} + \delta \frac{(a-c)^2}{8b} + \delta^2 \frac{(a-c)^2}{8b} + \cdots$$

Present Value 現在値

$$= \sum_{t=0}^{\infty} \delta^t \frac{(a-c)^2}{8b} = \frac{1}{1-\delta} \frac{(a-c)^2}{8b} \quad (\because \delta < 1)$$

約束を破るとき企業は以下の問題を解く。

「$\underset{y_1}{\mathrm{Max}}\ py_1 - cy_1 \quad s.t.\ y_2 = \dfrac{a-c}{4b}$」　$p = a - b(y_1 + y_2)$

F.O.C　$\dfrac{1}{4}(3a - 3c - 8by_1) = 0$　　$y_1 = \dfrac{3(a-c)}{8b}$

$\pi_1 = \dfrac{9(a-c)^2}{64b}$ ←約束を破ったとき

$\dfrac{8(a-c)^2}{64b}$ ←約束を守ったとき

⇒ 約束を破るとそのときは $\dfrac{(a-c)^2}{64b} > 0$ だけもうける。

約束を破ったときの割引現在値

$$\frac{9(a-c)^2}{64b} + \underbrace{\sum_{t=1}^{\infty} \delta^t \frac{(a-c)^2}{9b}}_{\text{1回約束を破ると後はクールノー競争}} = \frac{9(a-c)^2}{64b} + \frac{\delta}{1-\delta}\frac{(a-c)^2}{9b} = \frac{(a-c)^2(81-17\delta)}{576b(1-\delta)}$$

割引現在値

$$\underbrace{\frac{1}{1-\delta}\frac{(a-c)^2}{8b}}_{\text{約束を守る}} - \underbrace{\frac{(a-c)^2(81-17\delta)}{576b(1-\delta)}}_{\text{破って競争}} = \frac{(a-c)^2(9-17\delta)}{576b(1-\delta)}$$

よって $9 - 17\delta > 0$ すなわち $\delta < \dfrac{9}{17}$ のとき談合は成立する。