例 $y = f(x) = x^a \ (0 < a \leq 1)$ として $\underset{x}{\mathrm{Max}} \ \underbrace{py - wx}_{\pi}$ を求める。

$$\frac{\partial \pi}{\partial x} = apx^{a-1} - w = 0 \qquad \therefore x = \left(\frac{w}{ap}\right)^{\frac{1}{a-1}}$$

$$x^*(p,w) = \left(\frac{w}{ap}\right)^{\frac{1}{a-1}}$$ ← 生産要素需要関数 (Factor Demand Function)

$$y^* = f(x^*) = \left(\frac{w}{ap}\right)^{\frac{1}{a-1}}$$ ← 供給関数 (Profit Maximizing Supply Function)

$$\pi^* = py^* - wx^* = w\left(\frac{1-a}{a}\right)\left(\frac{w}{ap}\right)^{\frac{1}{a-1}}$$ ← 最適値関数 (Profit Function)

これが $\underset{x}{\mathrm{Max}}\ \pi$

○Hotellings Lemma

> Factor Demand Function, Supply Function, Profit Function
>
> の3つが与えられたとき,
>
> $\frac{\partial \pi^*}{\partial p} = y^*$, $\frac{\partial \pi^*}{\partial w} = -x^*$ が成り立つ

証明

$$\pi^* = py^* - wx^*$$
$$= pf(x^*(p,w)) - wx^*(p,w)$$

$$\frac{\partial \pi^*}{\partial p} = f(x^*(p,w)) + p\frac{\partial f}{\partial x^*}\frac{\partial x^*}{\partial p} - w\frac{\partial x^*}{\partial p}$$
$$= f(x^*(p,w)) + \left[p\frac{\partial f}{\partial x^*} - w\right]\frac{\partial x^*}{\partial p}$$
$$= f(x^*(p,w)) = y^*$$

$$\frac{\partial \pi^*}{\partial w} = p\frac{\partial f}{\partial x^*}\frac{\partial x^*}{\partial w} - x^*(p,w) - w\frac{\partial x^*}{\partial w}$$
$$= \left[p\frac{\partial f}{\partial x^*} - w\right]\frac{\partial x^*}{\partial w} - x^*(p,w)$$
$$= -x^*(p,w) = -x^*$$

π^*は最適値関数なので包絡線定理より $p\frac{\partial f}{\partial x^*} - w = 0$
(はじめに $\frac{\partial \pi}{\partial x} = 0$ からx^*を求めた)

○費用最小化

問題は「$\underset{x}{\mathrm{Min}}\ wx \quad s.t \quad y = f(x)$」

ラグランジュ乗数を用いて $L(x,\lambda) = wx - \lambda[f(x) - y]$ とおく。

$$\frac{\partial L}{\partial x} = w - \lambda\frac{\partial f}{\partial x} = 0 \quad \text{—— ①} \qquad \frac{\partial L}{\partial \lambda} = f(x) - y = 0 \quad \text{—— ②}$$

①②を x, λ について解くと費用関数を得る。

$$wx^*(w,y) \equiv C(y,w)$$ ← yとwを決めるとその中の費用で一番小さいものがわかった。

完全競争市場 ーハブラシなど安い日用品にあてはまる。

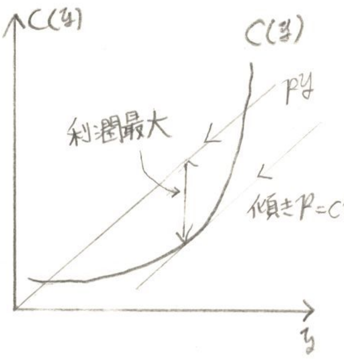
○ 完全競争市場成立の5つの条件

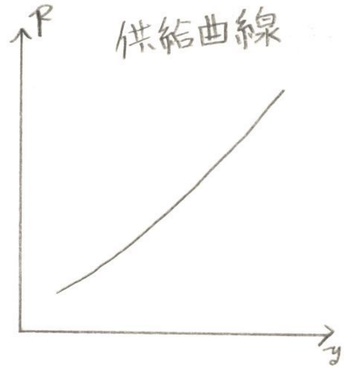
1、多数の生産者(企業)，消費者が存在する
2、一企業が価格に影響を与えることはない。(価格を所与とする経済主体＝Price taker)
3. 同一の製品市場を考える。
4、消費者は製品の全ての正確な情報をもっている。
5、企業は自由に参入撤退できる。

企業の最大化問題は「$\max_y py - C(y)$」 今までと違ってxでなくyを考える。

ここで大量に生産しようとすると限界生産逓減から効率が下がるので

$C'(y) > 0$, $C''(y) > 0$ である。





F.O.C $p - C'(y) = 0$

$\therefore\ p = C'(y)$

価格　限界費用；MC (Marginal Cost)

$y = y(p)$ (供給関数) なので

$p = C'(y(p))$ ← これも供給関数

両辺をpで微分

$1 = \underbrace{C''(y(p))}_{正} y'(p)$ ⇒ $y'(p) > 0$ … 供給曲線は右上がり

○"費用"について

総費用(Total Cost) ＝ 可変費用 (Variable Cost) ＋ 固定費用 (Fixed Cost)

可変費用：自由に変えられる(労働力とか)

固定費用：自由に変えられない(工場建てたりとか) 生産量が0でも発生するので Sunk Cost ともいう。

$$C(y) = C^V(y) + F$$

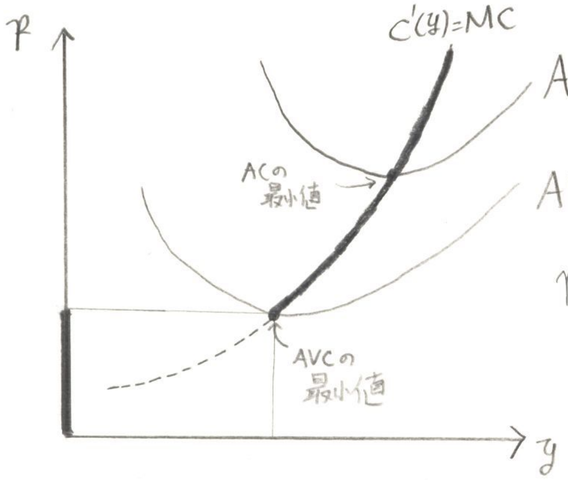
○企業が生産する(供給>0)条件

→企業が生産するのは生産しない場合よりももうかるとき

$\Rightarrow \underbrace{p\,y(p) - C^V(y) - F}_{生産したとき} \geq \underbrace{-F}_{生産しないとき}$

$\therefore\ p \geq \dfrac{C^V(y)}{y(p)}$ ← 平均可変費用 (AVC)

○企業の供給曲線



AC (Average Cost); 平均費用 $\frac{C(y)}{y(p)}$

AVC ; 平均可変費用 $\frac{C^v(y)}{y(p)}$

$p = \underset{\uparrow\atop MC}{C'(y)} \leq AVC$ では もうからないので 企業は生産をストップする。

よって左図の太線が実際の企業の供給曲線となる。

$AVC = \frac{C^v(y)}{y}$ の極値を求める

$$\frac{\partial}{\partial y}\frac{C^v(y)}{y} = \frac{C^{v\prime}(y)}{y} - \frac{C^v(y)}{y^2} = 0 \iff \underset{\uparrow\atop MC}{C'(y)} = \frac{C^v(y)}{y} = AVC$$

よって MC曲線は AVCの最小値で交わる。

○市場の供給 (例)

$Y(p) = \sum_{i=1}^{n} y_i(p)$ 市場の供給は企業の供給を足しあわせる。

例 $C(y) = y^2 + 1$ とすると

$C'(y) = MC = 2y \Rightarrow p = MC = 2y \Rightarrow y(p) = \frac{p}{2}$

仮に n 企業が同じ費用関数をもつとすると

$Y(p) = \frac{p}{2}n \Rightarrow P(Y) = \frac{2}{n}Y \Rightarrow$ 市場の供給曲線

企業数が増えると価格が下がる

○ 市場の均衡

$X(p) = Y(p)$ ← 需要=供給

ここで $X(p) = \sum_{i=1}^{n} x_i(p)$, $Y(p) = \sum_{i=1}^{n} y_i(p)$

($x_i(p)$:) ワルラスの需要関数

例 $X(p) = a - bp \quad (a, b > 0)$, $Y(p) = \frac{n}{2}p$ とする

$X(p) = Y(p) \iff a - bp = \frac{n}{2}p \quad p = \frac{a}{b + \frac{n}{2}}$

企業が同一の費用関数をもっているとする。
このとき企業の数 n と均衡の価格との関係を考える。

市場均衡の条件は $X(p) = n\,y(p)$

p は n の関数なので $X(p(n)) = n\,y(p(n))$

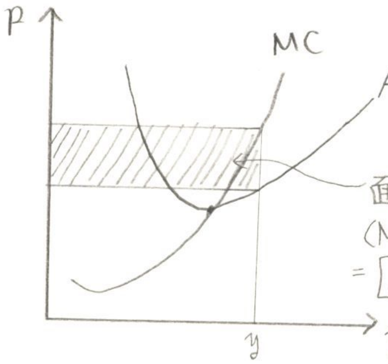
両辺を n で微分 $\dfrac{\partial X}{\partial p}\dfrac{\partial p}{\partial n} = y(p(n)) + n\dfrac{\partial y}{\partial p}\dfrac{\partial p}{\partial n}$

$$\Rightarrow X'(p)\,p'(n) = y(p(n)) + n\,y'(p)\,p'(n)$$

よって $p'(n) = \dfrac{y(p(n))}{X'(p(n)) - n\,y'(p(n))}$

p が増加すると X は小さくなって y が大きくなることを考えると、
n が大きくなると p が下がることがわかる。

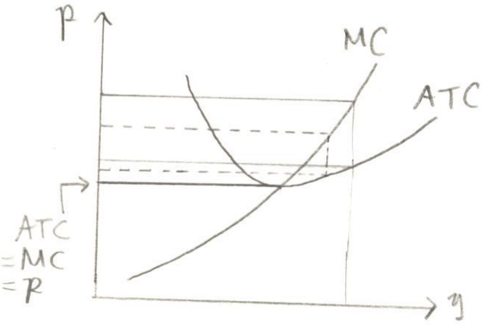
○(長期)の参入撤退



$\mathrm{ATC} \equiv \dfrac{C^v(y)+F}{y} = \dfrac{C(y)}{y}$

面積が利潤
$(\mathrm{MC}-\mathrm{ATC})\,y$
$= \left[C'(y) - \dfrac{C(y)}{y}\right]y = C'(y)\,y - C(y)$

短期と長期
- 短期…労働の調整は可能だが、資本の調整は不可能(固定費用一定)
- 長期…すべての生産要素が調整可能



ここで企業の最大化問題より

$\underset{y}{\mathrm{Max}}\ py - C(y)\ (\equiv \pi)$

F.O.C $p - C'(y) = 0 \Rightarrow p = C'(y) \equiv \mathrm{MC}$

$\Rightarrow C'(y)\,y - C(y) \equiv \pi > 0$

$\dfrac{\partial p}{\partial n} < 0 \Rightarrow$ 参入により p は下がる

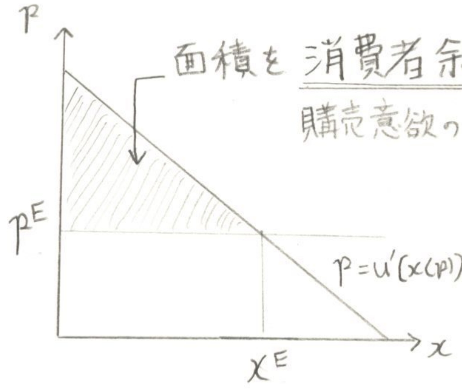
○消費者余剰

効用関数 $U(x,y) = u(x) + y$ とする(簡略化のため)
y は x 以外の全ての財と考えてよい。
この関数型を準線型効用関数と呼ぶ。

最大化問題は「$\underset{x,y}{\mathrm{Max}}\ u(x) + y \quad \mathrm{s.t}\ px + y = m$」
ただし y の価格を1とする。m は所得。y を代入して
「$\underset{x}{\mathrm{Max}}\ u(x) + m - px$」を解く。

F.O.C $u'(x) - p = 0$

$\therefore p = u'(x) = u'(x(p))$ ← これもワルラスの需要関数



面積を消費者余剰(Consumer Surplus; CS)という。

購売意欲の余剰＝消費者の利益

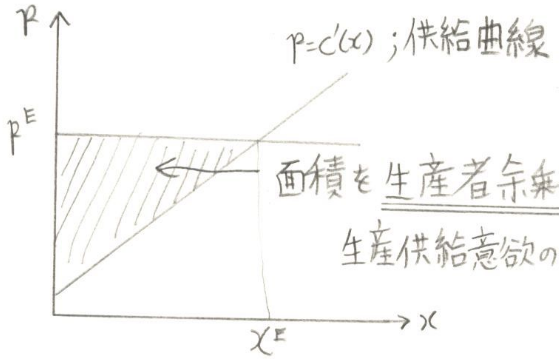
$$CS \equiv \int_0^{x^E} u'(x(p))\,dx - p^E x^E$$

(添字のEは均衡点であることを表す)

◦生産者余剰

xを生産する企業の最大化問題は「$\underset{x}{Max}\ px - c(x)$」

F.O.C $p - c'(x) = 0$ $\therefore p = c'(x)$ ← 供給関数



$$PS \equiv p^E x^E - \int_0^{x^E} c'(x)\,dx = p^E x^E - c(x^E) \equiv \pi$$

面積を生産者余剰(Producer Surplus; PS)という。

生産供給意欲の余剰＝企業の利潤

◦Total Surplus; TS

$TS \equiv CS + PS$ ← 社会厚生水準を計る目安(世の中の人がどれだけ得しているか)

◦代表的代理人(Representative Agent)

市場経済の均衡について客観的に考察するために市場に依存しないシステムを考える。

市場に依らないAgentが存在すると仮定する。

Agentの効用関数は $u(x) + y$ とする。

Agentは富(Wealth); Wをもっているとする。これは $c(x) + y = W$ を満たすとする。(yの価格を1としている)

Agentの最大化問題は

「$\underset{x,y}{Max}\ u(x) + y \quad s.t \quad c(x) + y = W$」

$\xrightarrow[y消去]{}$「$\underset{x}{Max}\ u(x) + W - c(x)$」

F.O.C $u'(x) - c'(x) = 0$ $\therefore u'(x) = c'(x)$
限界効用　限界費用 MC

ところで，$TS \equiv CS + PS$

$$\equiv \int_0^{x^E} u'(x)\,dx - p^E x^E + p^E x^E - \int_0^{x^E} c'(x)\,dx$$

$$= \int_0^{x^E} u'(x)\,dx - \int_0^{x^E} c'(x)\,dx$$

$$= u(x) - c(x)$$ （添字のEは略）

TSの最大値を求めるために F.O.C $u'(x) - c'(x) = 0$ $\therefore u'(x) = c'(x)$

Agent の F.O.C はTSを最大化する時のF.O.Cと一致する。

さらに市場経済では，消費者の最大化問題，企業の最大化問題から

$u'(x) = p$ と $c'(x) = p$ が成立する。（さっきやった）

よって市場経済の均衡では

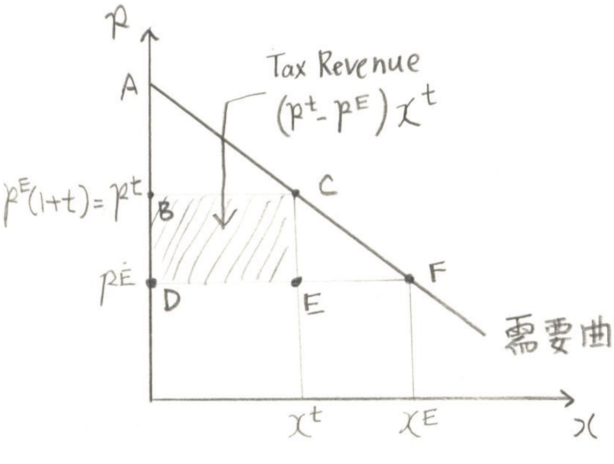
$\underline{\underline{u'(x) = c'(x) = p}}$ が成立する。

⇒市場経済（完全競争）では社会厚生水準は最大化（∵TSの最大化問題を解くから）

市場に依らない代表的代理人の厚生最大化を達成する。

○税金について

課税率をtとする。



課税前の消費者余剰 $CS = \triangle ADF$ である。

課税後 CSは $\triangle ABC$ に減少するが

政府は四角形BCED だけの

税収（Tax Revenue）を得ている。

しかし税収は消費者余剰の減少分を

相殺しきれず $\triangle CEF$ の部分が

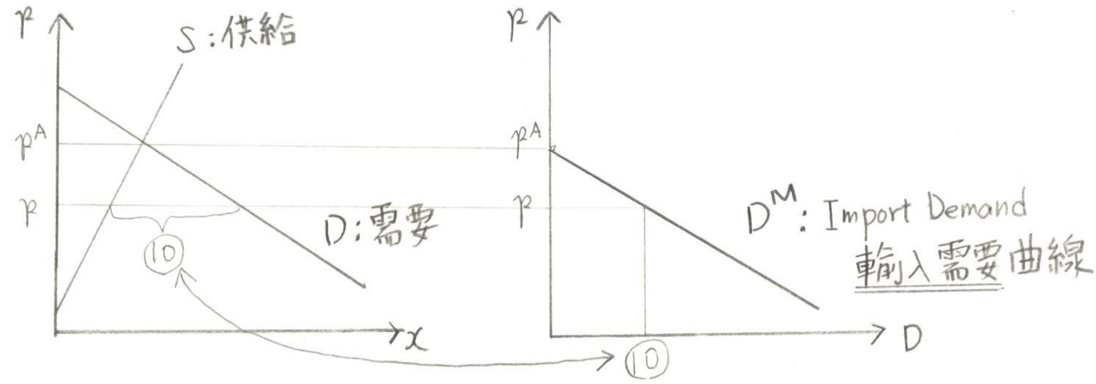
誰にも還元されずムダになっている。

この$\triangle CEF$の大きさを<u>死加重</u>（Dead Weight loss）

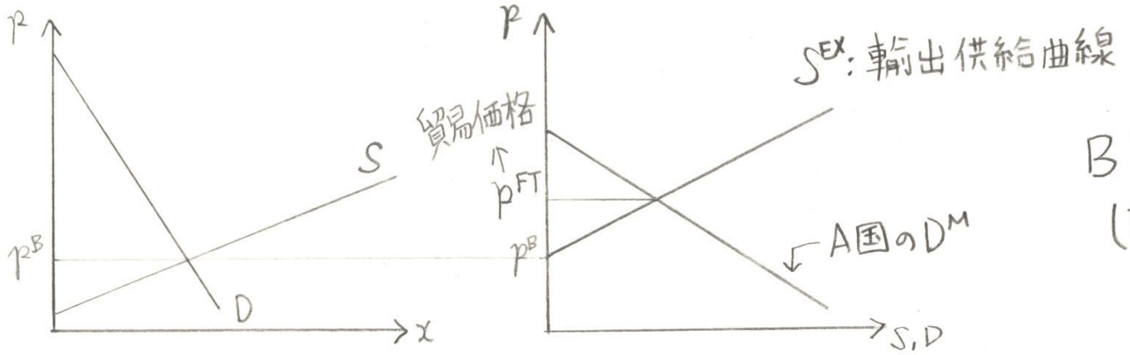
といい，税の非効率である。

○ 自由貿易について（何が良いのか？）

生産技術，選好関係が異なる2つの国を考える。
これらの国では同一の製品を生産消費しているとする。



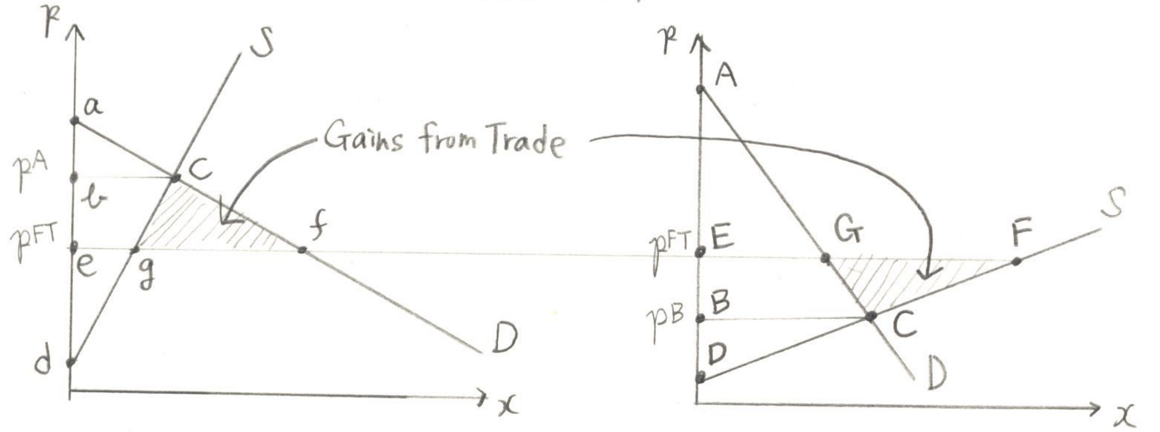
A国
（輸入する側）



B国
（輸出する側）

自由貿易は何が良いか？
貿易前の貿易開始した後の社会厚生水準を比べる
⇒ $W_{前} < W_{後}$ ならば 自由貿易 すべき

ここで W は社会厚生水準　$W \equiv TS \equiv CS + PS$



A国　貿易前　　貿易後
CS=△abc　CS=△aef=△abc+▱bcge+△cgf
PS=△bcd　PS=△edg=△bcd−▱bcge

W≡TS=△adc　W≡TS=△adc+△cgf
増加した

B国　貿易前　　貿易後
CS=△ABC　CS=△AEG=△ABC−▱EBCG
PS=△BCD　PS=△EDF=△BCD+▱EBCG+△CFG

W≡TS=△ADC　W≡TS=△ADC+△CFG
増加した

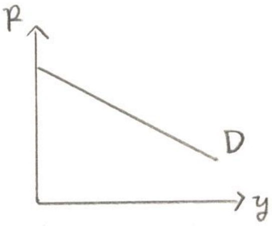
自由貿易

- A,B両国とも社会厚生水準が上昇
- AではCSが増加，PSが減少 ←A国の企業は貿易に反対する
- BではPSが増加，CSが減少 ← B国の消費者は貿易に反対する

得をする人も損をする人もいるが，全体としてはプラスになる。

不完全競争 (独占…企業が1つ，寡占…企業が少数(特に2つの場合を複占))

- 独占 (Monopoly)
  - → 競争が存在しない
  - → Price Taker でない
  - → 価格を自由に設定できる



しかし前提として右下がりの需要関数(価格が下がれば需要は増える)を想定している。

Monopolist の最大化問題を考える。

「$\max_{p,y} py - c(y) \quad s.t. \quad p = D(p)$」 $D(p) \equiv$ 需要

$\Updownarrow$

$p = p(y)$ とする。このとき需要は右下がりなので $p'(y) < 0$

「$\max_{y} p(y)y - c(y)$」

$p(y)y$ を収入 (Revenue) という。

F.O.C $\underbrace{p(y) + p'(y)y}_{MR} - \underbrace{c'(y)}_{MC} = 0$

よって $p(y) + p'(y)y \left(= \frac{\partial}{\partial y}(p(y)y)\right)$ を限界収入 (Marginal Revenue ; MR) という。

$\therefore$ MR = MC

変形して $p(y)\left[1 + \frac{dp}{dy}\frac{y}{p(y)}\right] = c'(y)$

$\Leftrightarrow p(y)\left[1 + \frac{1}{\varepsilon}\right] = c'(y)$

$\varepsilon \equiv \frac{dy}{dp}\frac{p}{y} = \frac{\frac{dy}{y}}{\frac{dp}{p}}$ を弾力性 (Elastivity) という。

例) $p(y) = a - by \quad C(y) = cy \quad a, b, c > 0$

最大化問題は

「$\max_{y} (a - by)y - cy$」

F.O.C $\underbrace{a - 2by}_{MR} - \underbrace{c}_{MC} = 0$

yについて解くと

$y^* = \frac{a - c}{2b}$

$p(y^*) = a - by^* = \frac{a + c}{2}$