消費者理論 (Consumer Theory)

消費者 ⇒ 消費活動を営む

↓

何をどのくらい消費するか選択し, 対価を支出する。

○「選択」についての前提

合理的選択の公理

→ 消費者は最も好ましい選択肢を消費対象として選択する。

∴ 選択肢を好ましい順に並べることができる。

選好関係が存在する。

$$\begin{cases} X \succsim X' & \cdots\cdots \ X' \text{より} X \text{を好む} \\ X \sim X' & \cdots\cdots \ X \text{と} X' \text{を同程度好む} \end{cases}$$

$\succsim$ についての3つの性質

- 完備性
  → $x \succsim x'$ かつ $x' \succsim x$ ならば $x \sim x'$
- 推移性
  → $x \succsim x'$ かつ $x' \succsim x''$ ならば $x \succsim x''$
- 連続性

○顕示選好の弱公理

$X = \{x, x'\}$ のもとで $x \succsim x'$ ならば

$X = \{x, x', x''\}$ のもとで $x' \succsim x$ となることはない。

☆「限界 (Marginal)」について

「限界」とはあるものを1単位増加させたときどう変化するかを表している。つまり,

「限界」=「偏微分」

と思ってよい。

○ 効用関数 (Utility Function)

消費を x としたとき、消費から得られる満足度＝効用 u を x の関数として表したもの。$u=u(x)$

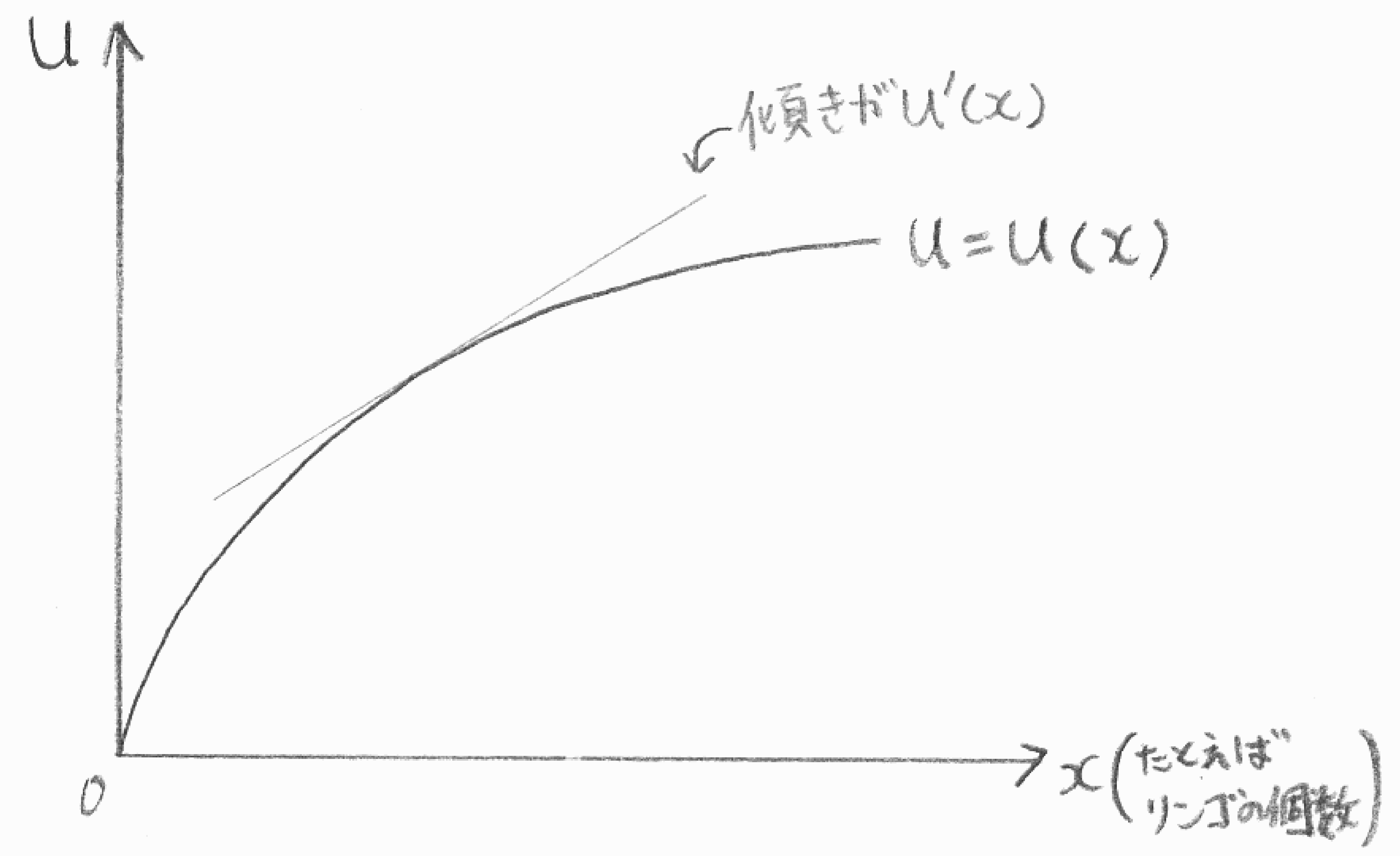
○ 限界効用 (Marginal Utility)

消費 x を1単位増加させたときの効用 u の増加量。すなわち $u'(x)$ のこと。

消費が増加すれば満足度も高まるので $u'(x)>0$

しかし、同じ物だけでは飽きてくるので $u'(x)$ の大きさは小さくなっていく。すなわち $u''(x)<0$

これを限界効用逓減の法則という。



○ 消費者の目的

- 限られた予算制約の中で効用を最大化する。
- 一定の効用を得るための支出を最小化する。

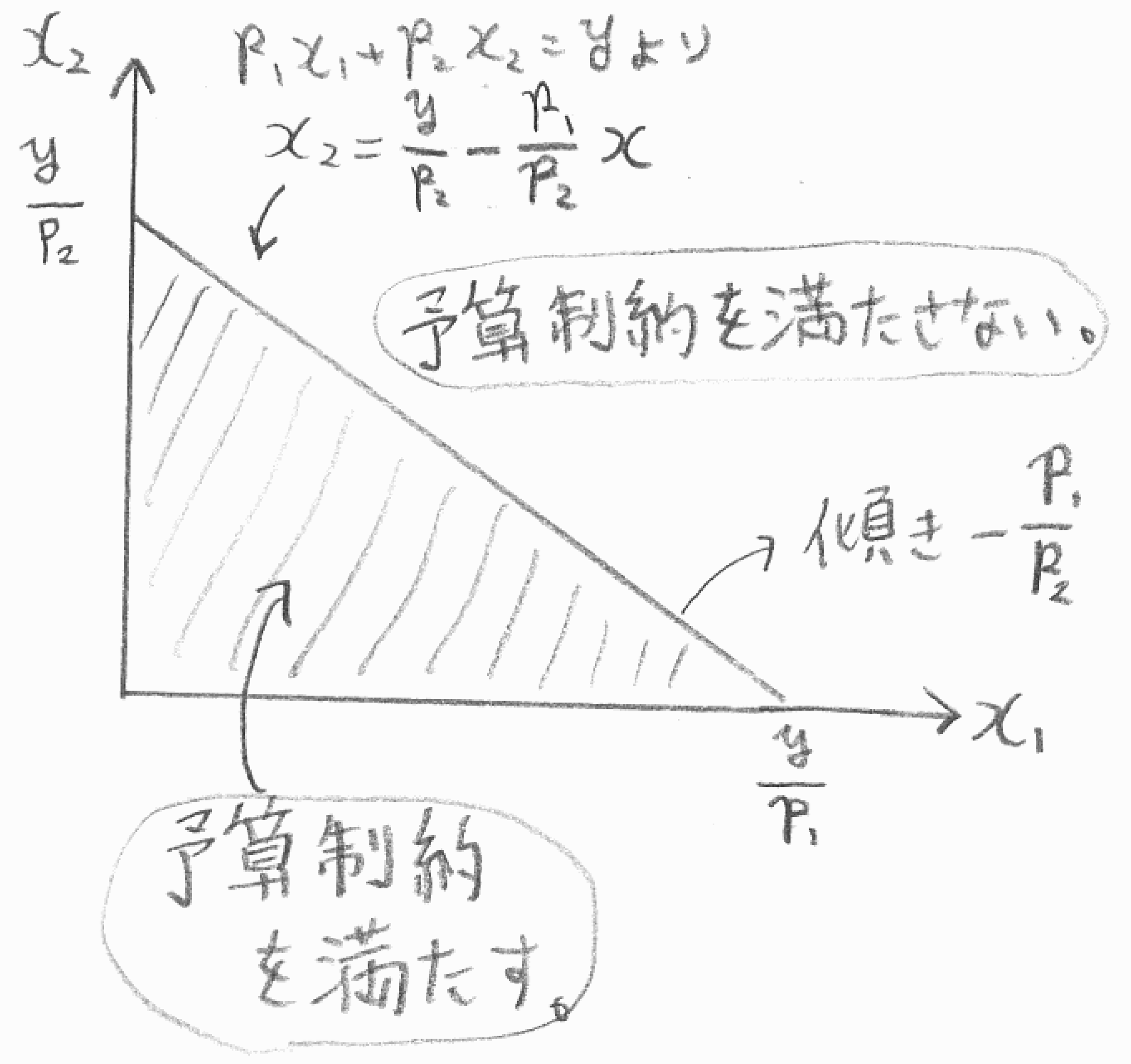
言いかえ可能 双対性 (Duality)

効用最大化させる消費者は次の問題を解く。(以下 x_1, x_2 の2財の消費を考える)

「$\underset{x_1, x_2}{\mathrm{Max}}\ u(x_1, x_2)\quad s.t\quad P_1x_1+P_2x_2 \leq y$」

($P_1x_1+P_2x_2 \leq y$ を満たすように x_1, x_2 を動かしたときの $u(x_1, x_2)$ の最大値はいくらか。)

→予算制約 (Budget Constraint) P_1, P_2 は x_1, x_2 の価格, y は家計の所得。



実際はぎりぎりまで消費した方が効用は大きいので、予算制約は

$P_1x_1+P_2x_2=y$ だけ考えれば十分。

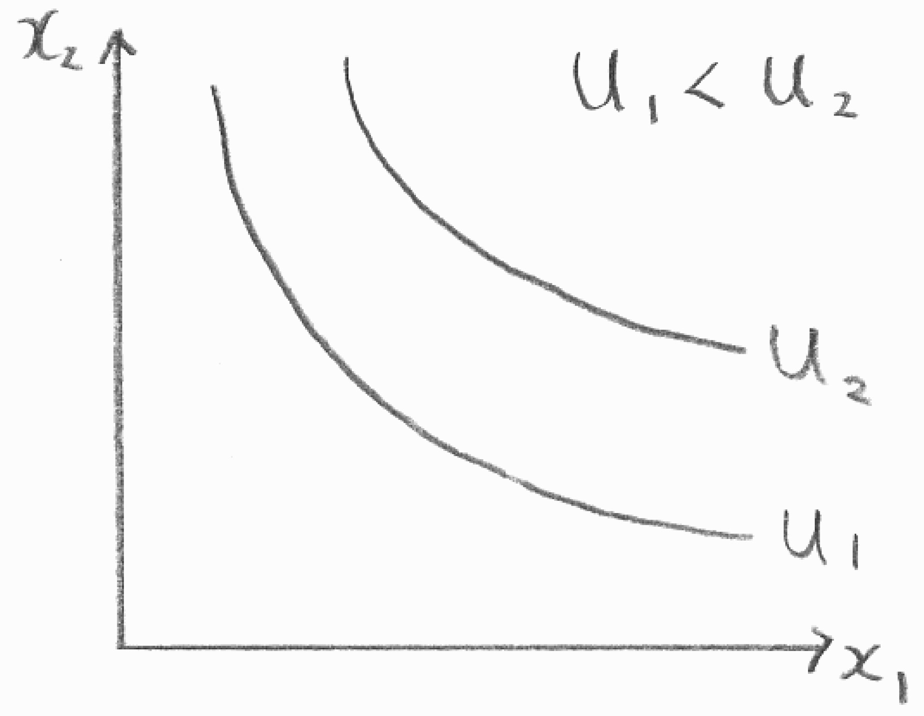
↑
等号

○無差別曲線 (Indifferent Curve)

x_1x_2平面上で効用 u を一定に保つように描かれた曲線

・無差別曲線の性質

(1) 右下がり
(2) 原点に向かって凸(下に凸)
(3) 右上にある無差別曲線ほど効用 u は大きい
(4) 決して交わらない
(5) 線である(幅があってはならない)



理由

(1) → 効用を一定に保つには x_1 を増やせば、x_2 は減らさなければならない。
(2) → 限界効用逓減の法則より。例えば x_1 が小さくて x_2 が大きいとき、x_2 にはもう飽きているので、x_1 を少し増やしたとき、効用を一定に保つには x_2 を x_1 以上に減らさなければならない。x_1 が大きく、x_2 が小さいときには逆になるので、結果無差別曲線は下に凸になる。
(3) → たくさん消費すれば効用は高くなるので明らか。
(4)(5) → (3) に反しないようにするため。

○限界代替率 (Marginal Rate of Substitution ; M.R.S)

無差別曲線の傾きの絶対値。すなわち $\left|\dfrac{dx_2}{dx_1}\right|$

$u(x_1, x_2) = \bar{u}$

x_1, x_2 を加減して $\bar{u}$ を一定に保つことを考える。

全微分して

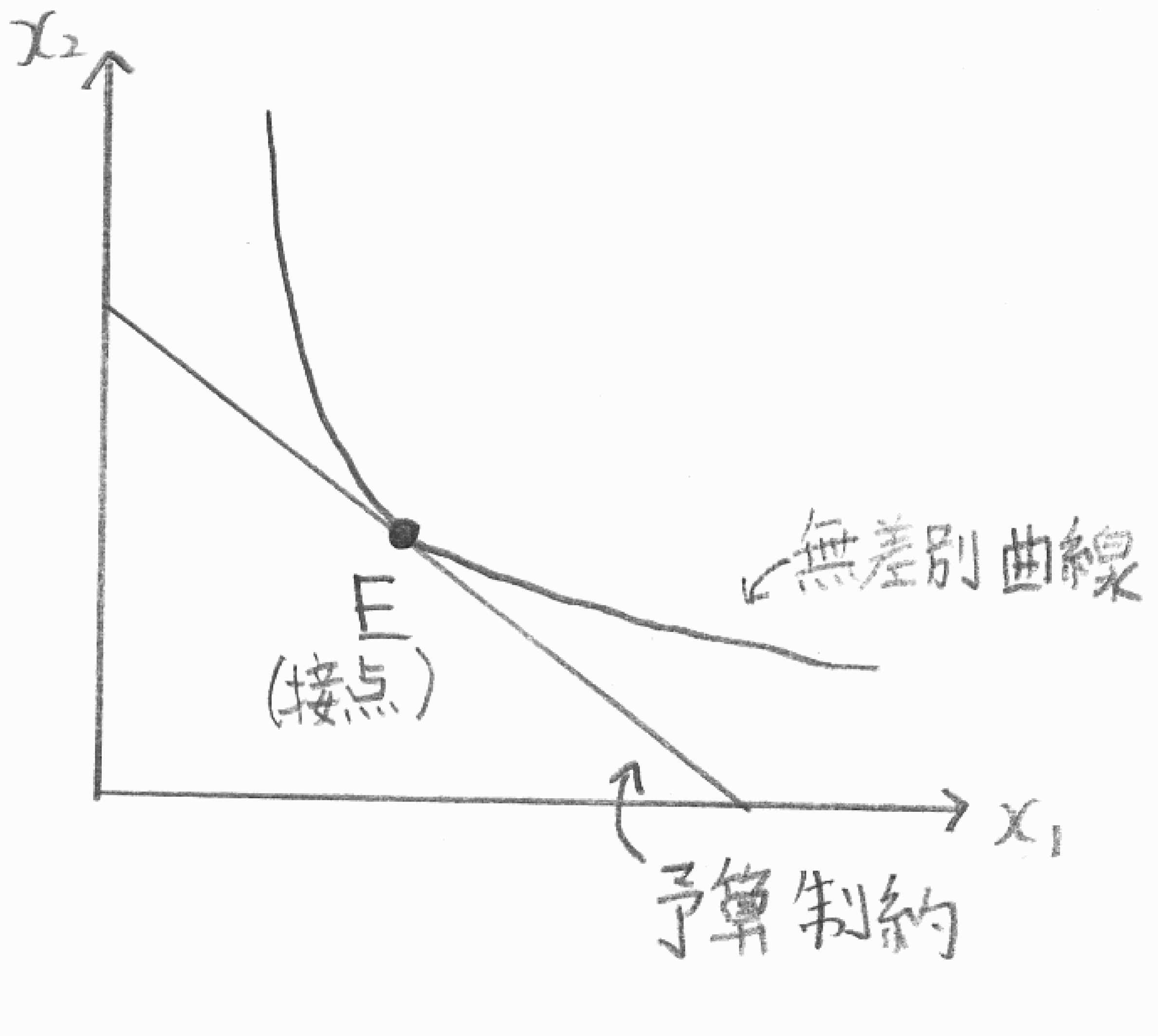
$\dfrac{\partial u}{\partial x_1}dx_1 + \dfrac{\partial u}{\partial x_2}dx_2 = 0$ (x_1, x_2 の変化による u の変化は絶対値が同じで符号が逆)

$$\Rightarrow \frac{dx_2}{dx_1} = -\frac{\dfrac{\partial u}{\partial x_1}}{\dfrac{\partial u}{\partial x_2}}$$

← x_1 の限界効用 (分子)
← x_2 の限界効用 (分母)

よって $\underline{\underline{\text{M.R.S} = \left|\dfrac{dx_2}{dx_1}\right| = \left|-\dfrac{\frac{\partial u}{\partial x_1}}{\frac{\partial u}{\partial x_2}}\right|}}$
(限界代替率)

☆ 消費者にとって最適な点は以下のE点である。(右上にいくほど u は大きいので)



このとき傾きに注目して

$$\boxed{-\frac{p_1}{p_2} = -\frac{\dfrac{\partial u}{\partial x_1}}{\dfrac{\partial u}{\partial x_2}}} = \text{M.R.S}$$

↑
予算制約線の傾き

実際に $U = x_1^{\alpha} x_2^{1-\alpha}$ の場合の効用最大化問題を考える。
↑コブ−ダグラス(Cobb-Douglas)型関数

消費者の問題は
「$\displaystyle\max_{x_1, x_2} x_1^{\alpha} x_2^{1-\alpha}$　s.t　$p_1 x + p_2 x_2 = y$」

○解法1「M.R.S = 予算制約線の傾き」を利用

$$M.R.S = \frac{dx_2}{dx_1} = -\frac{\frac{\partial u}{\partial x_1}}{\frac{\partial u}{\partial x_2}} = -\frac{\alpha x_1^{\alpha-1} x_2^{1-\alpha}}{(1-\alpha) x_1^{\alpha} x_2^{-\alpha}} = -\frac{\alpha}{1-\alpha}\frac{x_2}{x_1} = -\frac{p_1}{p_2}$$

$$\left.\begin{aligned} &\Leftrightarrow \alpha p_2 x_2 = (1-\alpha) p_1 x_1 \\ &\Leftrightarrow \alpha (p_1 x_1 + p_2 x_2) = p_1 x_1 \\ &\Leftrightarrow \alpha y = p_1 x_1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \underbrace{x_1^* = \frac{\alpha y}{p_1} \quad x_2^* = \frac{(1-\alpha) y}{p_2}}_{\text{ワルラスの需要関数}}$$

(解の意味で*をつける)

(Warlasiam Demand Function)

ちなみに $\ln$ が単調増加であることから $u(x)$ のかわりに $\ln(u(x))$ を用いて

$$u' = \ln u = \alpha \ln x_1 + (1-\alpha) \ln x_2$$

$\dfrac{\partial u'}{\partial x_1} = \dfrac{\alpha}{x_1}$, $\dfrac{\partial u'}{\partial x_2} = \dfrac{1-\alpha}{x_2}$ から $MRS = -\dfrac{\frac{\partial u'}{\partial x_1}}{\frac{\partial u'}{\partial x_2}} = -\dfrac{\alpha}{1-\alpha}\dfrac{x_2}{x_1}$ とすると簡単。

○解法2 ラグランジュ乗数法

上の u' を用いた「$\displaystyle\max_{x_1, x_2} \alpha \ln x_1 + (1-\alpha) \ln x_2$　s.t　$p_1 x_1 + p_2 x_2 = y$」

という問題の代わりに $L = \alpha \ln x_1 + (1-\alpha) \ln x_2 + \lambda [y - p_1 x_1 - p_2 x_2]$

とおいて「$\displaystyle\max_{x_1, x_2} L$」を解く。(λをラグランジュ乗数という)

$\dfrac{\partial L}{\partial x_1} = \dfrac{\alpha}{x_1} - \lambda p_1 = 0$ —①　$\dfrac{\partial L}{\partial x_2} = \dfrac{1-\alpha}{x_2} - \lambda p_2 = 0$ —②　$\dfrac{\partial L}{\partial \lambda} = y - p_1 x_1 - p_2 x_2 = 0$ —③

①②③を x_1, x_2, λ について解いて　(最大値を求めるので1回微分を0とおく)

$$\lambda = \frac{1}{y} \qquad \underbrace{x_1^* = \frac{\alpha y}{p_1} \qquad x_2^* = \frac{(1-\alpha) y}{p_2}}_{\text{ワルラスの需要関数}}$$

ここで $\begin{cases} p_1 x_1^* = \alpha y \\ p_2 x_2^* = (1-\alpha) y \end{cases}$

であるから α は全支出のうち x_1 に支出する割合を表している。

また $\dfrac{\partial L}{\partial x_i} = \dfrac{\partial u}{\partial x_i} - \lambda p_i = 0$　$(i = 1, 2)$　としているので

$$\lambda = \frac{\frac{\partial u}{\partial x_i}}{p_i}$$

$\frac{\partial u}{\partial x_i}$ ← 限界効用
p_i ← 限界費用(偏微分の考えでは $\dfrac{\partial y}{\partial x_i}$ だからこう言う(多分))

○包絡線定理（Envelop Theorem）

$f(x, \lambda)$という関数を考える。

fを最適化（最大化 または最小化）するxがλの関数，すなわち

$x^* \equiv x^*(\lambda)$　だとしたとき（*は解＝最適化されているという印）

$$V(x^*(\lambda), \lambda) \equiv f^*(x^*(\lambda), \lambda)$$

によって<u>最適値関数</u>を定義する。

ここでλが変動したときVはどのように変わるのか

$$\frac{dV}{d\lambda} = \underbrace{\frac{\partial f}{\partial x^*}}_{0\text{である。}}\frac{dx^*}{d\lambda} + \frac{\partial f}{\partial \lambda} = \frac{\partial f}{\partial \lambda}$$

全微分に関係する定理
$f(x(t), y(t))$のとき
$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt}$$
を用いている

なぜなら，f^*は最適値関数

⇒f^*はx^*によって最適化されている

⇒一階条件が満たされている。（x^*は$\frac{\partial f}{\partial x} = 0$を解いて出したもの）

F.O.C と S.O.C

最適値（最大値，最小値）を求めたのだから<u>1回微分 $f' = 0$</u>

これを一階の（必要）条件［First Order (Necessary) Condition, F.O.C］といい，

最大か最小かを調べるための<u>2回微分 $f'' \gtrless 0$</u>

を二階の（十分）条件［Second Order (Sufficient) Condition, S.O.C］という。

以上よりVの変化はxを経由せずにλの変化でわかる。

○ 市場での総需要

効用関数がCobb-Douglas型の消費者A,B 2人からなる市場の需要を考える

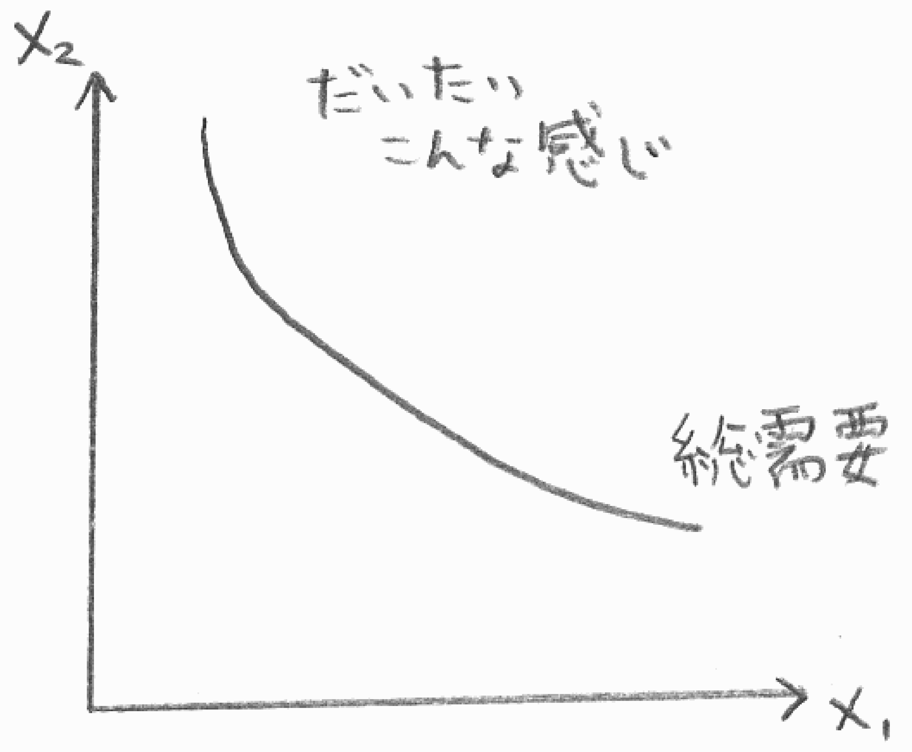
Warlasの需要関数は

$$X_1^{A*} = \frac{\alpha Y^A}{p_1} \qquad X_1^{B*} = \frac{\beta Y^B}{p_1}$$

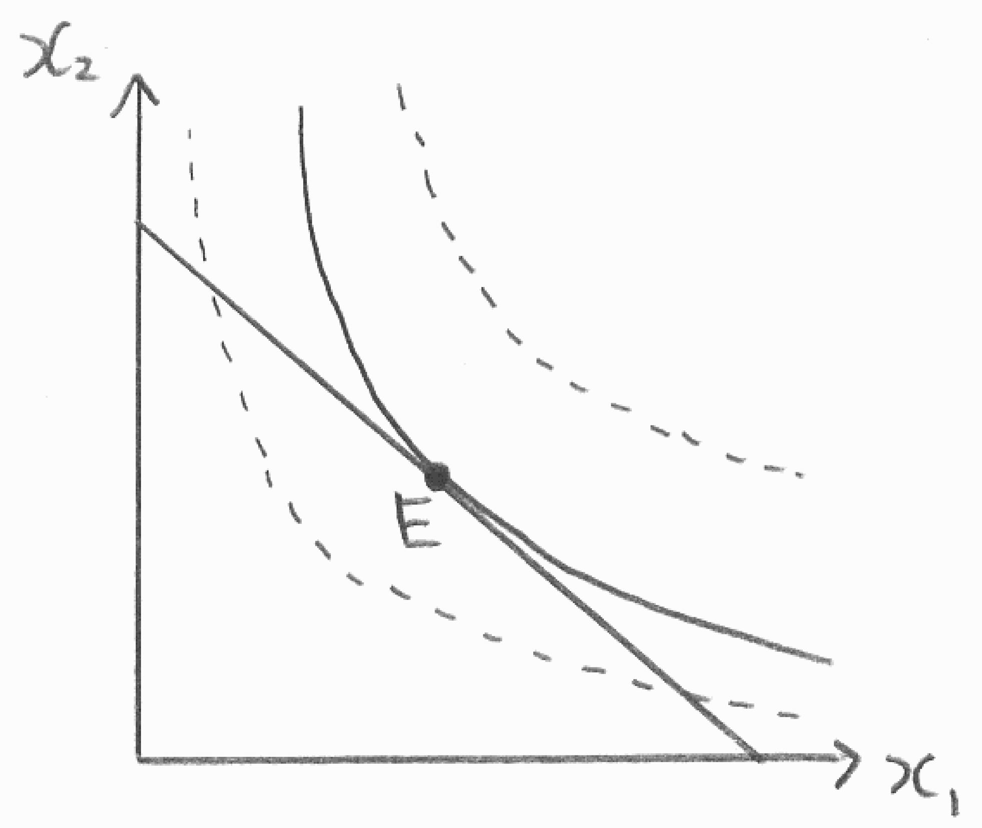
$$X_2^{A*} = \frac{(1-\alpha) Y^A}{p_2} \qquad X_2^{B*} = \frac{(1-\beta) Y^B}{p_2}$$

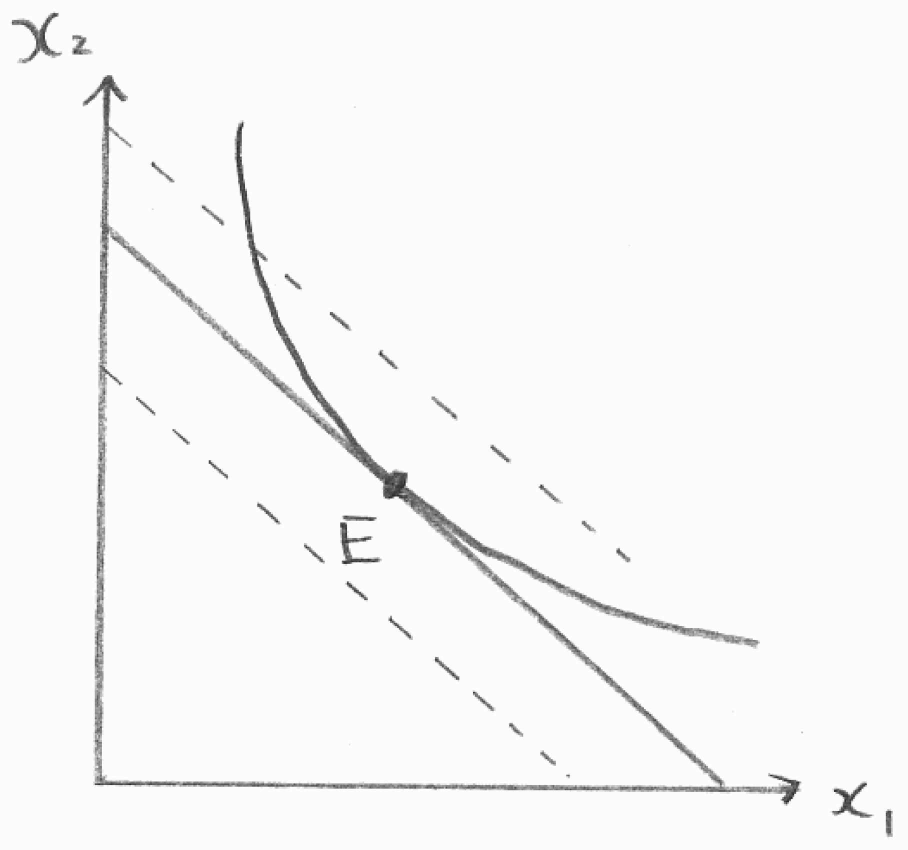
$$\Rightarrow \left.\begin{matrix} X_1^{A*} + X_1^{B*} \\ X_2^{A*} + X_2^{B*} \end{matrix}\right\} \text{総需要}$$

足すだけ!



○ 双対性 (Duality) 視覚的に考える





効用最大化
予算制約線を固定して
無差別曲線を動かす

⟺ 同じこと

支出最小化
無差別曲線を固定して
予算制約線を動かす

そこで今度は支出最小化問題を解いてみる。

「 $\displaystyle \min_{x_1, x_2} \underbrace{p_1 x_1 + p_2 x_2}_{y} \quad s.t \quad u(x_1, x_2) = \underbrace{\bar{u}}_{一定}$ 」

ラグランジュ乗数法 $L = p_1 x_1 + p_2 x_2 + \mu[\bar{u} - u(x_1, x_2)]$

↑ λではなくてμと使い分け

F.O.C $\displaystyle \frac{\partial L}{\partial x_i} = p_i - \mu \frac{\partial u(x_1, x_2)}{\partial x_i} = 0 \quad (i = 1, 2)$

$$\frac{\partial L}{\partial \mu} = \bar{u} - u(x_1, x_2) = 0$$

これらを x_1, x_2 について解くと <u>Hicksの需要関数</u> h を得る。

$$x_1^* \equiv h_1 = h_1(p_1, p_2, \bar{u}), \quad x_2^* \equiv h_2 = h_2(p_1, p_2, \bar{u})$$

ここまで効用最大化問題や支出最小化問題を解いて u や y を最適化させた(uを最大化，yを最小化)。その結果，最適化された u や y の値が求まり，他の変数(uの場合は p_1, p_2, y　yの場合は $p_1, p_2, \bar{u}$)が変化したときの影響を調べることができる。

○**間接効用関数** ≡ u(効用)の最適値関数

Cobb-Douglas 型関数のとき

$$u(x_1, x_2) = \alpha \ln x_1 + (1-\alpha)\ln x_2$$

$$x_1^* = \frac{\alpha y}{p_1} \qquad x_2^* = \frac{(1-\alpha)y}{p_2}$$

$$V(p_1, p_2, y) \equiv u^* = \alpha \ln \frac{\alpha y}{p_1} + (1-\alpha)\ln \frac{(1-\alpha)y}{p_2}$$

↑
間接効用関数

○**支出関数** ≡ y(支出)の最適値関数

$$y(x_1, x_2) = p_1 x_1 + p_2 x_2$$

$$x_1^* = h_1(p_1, p_2, \bar{u}), \quad x_2^* = h_2(p_1, p_2, \bar{u})$$

$$E(p_1, p_2, \bar{u}) = p_1 h_1(p_1, p_2, \bar{u}) + p_2 h_2(p_1, p_2, \bar{u})$$

↑
支出関数

○間接効用関数と支出関数

$$u(x_1, x_2) = x_1^{\alpha} x_2^{1-\alpha}$$

$$V(p_1, p_2, y) = \left(\frac{\alpha y}{p_1}\right)^{\alpha}\left(\frac{(1-\alpha)y}{p_2}\right)^{1-\alpha} = \bar{u} \qquad (\ln を使わずに表した)$$

yについて解くと

$$y = \frac{p_1^{\alpha} p_2^{1-\alpha}}{\alpha^{\alpha}(1-\alpha)^{1-\alpha}}\bar{u} = E(p_1, p_2, \bar{u})$$

要するに
VとEは逆関数の関係!

○恒等式

$E(p, v(p, y)) \equiv y$ → 効用$v(p,y)$を与える最小支出 $= y$

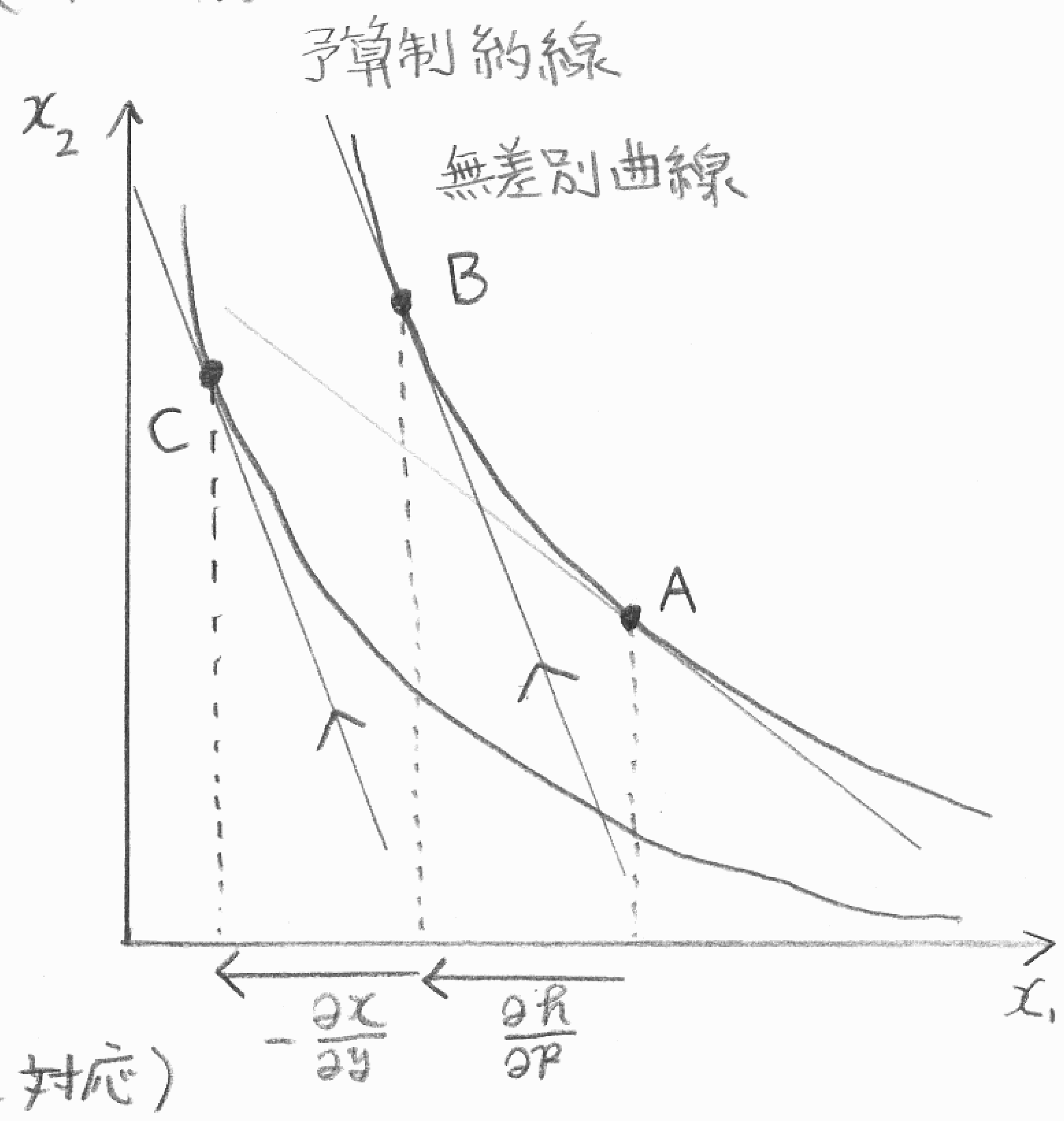
$v(p, e(p, \bar{u})) \equiv \bar{u}$ → $E(p, \bar{u})$による支出から得られる最大効用は$\bar{u}$

$x(p, y) \equiv h(p, v(p, y))$ → 所得がyの時のWarlasの需要関数は効用$v(p,y)$のときのHicksの需要関数

$h(p, u) \equiv x(p, e(p, u))$ → uを与えるHicksの需要関数は所得$e(p,u)$のときのWarlasの需要関数

○ スルーツキー方程式 (Slutzky Equation)

財の値段 p が変化したとき需要 x がどのように変わるか表現したもの



$$h(p,u) \equiv x(p, \boxed{e(p,u)})$$

$$\Rightarrow \frac{\partial h}{\partial p} = \frac{\partial x}{\partial p} + \frac{\partial x}{\partial y}\frac{\partial e}{\partial p}$$

$$\boxed{\frac{\partial x}{\partial p} = \frac{\partial h}{\partial p} - \frac{\partial x}{\partial y}x}$$ スルーツキー方程式

ここで

$\frac{\partial h}{\partial p}$ は代替効果を表す。

同じ無差別曲線を動く変化 (右上図の A→B に対応)

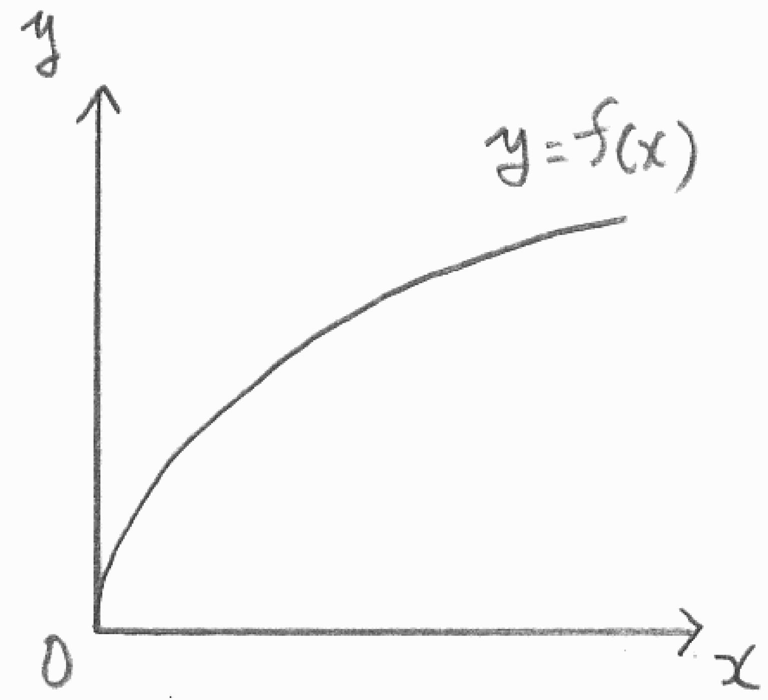
$-\frac{\partial x}{\partial y}x$ は所得効果を表す。

所得が変化したときの変化 (右上図の B→C に対応)

企業の理論

○ 利潤最大化問題 (生産要素が一つの場合)

↳ 労働とか資本とか、原料とか 変数 x で表す



$$\pi = py - wx$$ (利潤 = 売り上げ − 費用)

π: profit 利潤, p: price 価格, y: product 生産量, w: wage 賃金, x: input 労働

ここで y は x の関数で $y=f(x)$ であり、これを生産関数という。

生産関数は効用関数と同じように $f'(x)>0$, $f''(x)<0$

$f'(x)$: 限界生産　$f''(x)<0$: 限界生産逓減

企業の目的は

「$\max_x \underbrace{py - wx}_{\pi}$ s.t $y=f(x)$」$\Leftrightarrow$「$\max_x \underbrace{pf(x) - wx}_{\pi}$」であるので、

F.o.c $\frac{\partial \pi}{\partial x} = p\cdot f'(x) - w = 0 \Rightarrow f'(x) = \frac{w}{p}$ を得る。