No.

Date

~~平均値の~~ 定理

$f(x)$ が閉区間 $[a,b]$ で連続

開区間 (a,b) で微分可能

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)$$

となる $c\in(a,b)$ が存在する

証明

$$F(x)=f(x)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$$

とおく

$F(a)=f(a)=F(b)$

ロルの定理より

$\exists c\in(a,b)$ s.t. $F'(c)=0$

すなわち $f'(c)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$

定理 (平均値の定理の一般化)

$f(x), g(x)$ が $[a,b]$ で連続かつ

(a,b) で微分可能

$g'(x)\neq 0 \quad ({}^\forall x\in(a,b))$

このとき

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(c)}{g'(c)}$$

となる $c\in(a,b)$ が存在する。

証明

ロルの定理より $g(b)-g(a)\neq 0$

$$F(x)=f(x)-\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}(g(x)-g(a))$$

とおくと

$F(a)=f(a)=F(b)$

ロルの定理より

${}^\exists c\in(a,b)\ F'(c)=0$ //

ロピタルの定理

$-\infty\leqq a<b\leqq+\infty$

$f(x), g(x)$ は $[a,b]$ で連続

(a,b) で微分可能

$g'(x)\neq 0 \quad ({}^\forall x\in(a,b))$

(イ) $\displaystyle\lim_{x\to a+0}f(x)=0$ かつ $\displaystyle\lim_{x\to a+0}g(x)=0$

または (ロ) $\displaystyle\lim_{x\to a+0}g(x)=\pm\infty$

のいずれか一方が成立つ

このとき もし

$${}^\exists\lim_{x\to a+0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

ならば

$${}^\exists\lim_{x\to a+0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a+0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

証明

$a\in\mathbb{R}$ (イ) の場合

$${}^\exists\lim_{x\to a+0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\gamma$$

$\Leftrightarrow {}^\forall\varepsilon>0\ {}^\exists\delta=\delta(\varepsilon)>0$ s.t. $a<x<a+\delta$

$$\Rightarrow\left|\frac{f'(x)}{g'(x)}-\gamma\right|<\varepsilon$$

$a<x<y<a+\delta$ に平均値の定理の一般化をつかうと ${}^\exists z\in(x,y)$ s.t.

$$\frac{f(x)-f(y)}{g(x)-g(y)}=\frac{f'(z)}{g'(z)}$$

$\displaystyle\lim_{x\to a+0}f(x)=0,\ \lim_{x\to a+0}g(x)=0$

だから $a<y<z<a+\delta$

$$\frac{f(y)}{g(y)}=\frac{f'(z)}{g'(z)}$$

No.
Date

$$\left|\frac{f(y)}{g(y)}-\gamma\right|<\varepsilon$$

すなわち
$\forall\varepsilon>0,\ \exists\delta=\delta(\varepsilon)>0$ s.t.
$a<y<a+\delta$
$\Rightarrow\left|\frac{f(y)}{g(y)}-\gamma\right|<\varepsilon$

よって
$$\exists\lim_{x\to a+0}\frac{f(x)}{g(x)}=\gamma=\lim_{x\to a+0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

$\lim_{x\to a}$ $a<x<a+\delta$
を $a-\delta<x<a+\delta$ $|x-a|<\delta$
と考える

このときもし
$$\exists\lim_{x\to a+0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$
ならば
$$\exists\lim_{x\to a+0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a+0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$ //

例
$$\exists\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)}{g(x)}$$
でも
$$\nexists\lim_{x\to 0^+}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$
となる例

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2\sin\frac{1}{x}}{\sin x}$$
$$=\lim_{x\to 0}x\frac{x}{\sin x}\sin\frac{1}{x}=0$$ 存在する

$$\lim_{x\to 0}\frac{2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}}{\cos x}$$ 存在しない

$$x_n=\frac{1}{2n\pi+\theta}\ (n\in\mathbb{N})$$
とおくと
$$2x_n\sin\frac{1}{x_n}-\cos\frac{1}{x_n}$$
$$=2\left(\frac{1}{2n\pi+\theta}\right)\sin(2n\pi+\theta)-\cos(2n\pi+\theta)$$
$$\xrightarrow{n\to\infty}-\cos\theta$$

$$\lim_{\substack{n\to 0\\(x_n\to 0)}}\frac{2x_n\sin\frac{1}{x_n}-\cos\frac{1}{x_n}}{\cos x_n}=\underbrace{-\cos\theta}_{}$$
$[-1,1]$

関数近似

- 多項式（べき級数展開）
- 三角関数（Fourier 級数）
- ⋮
- Wavelet 近似

定理（Taylorの定理）

$f(x)$を開区間Iでn回微分可能
$a\in I$
このとき任意の点 $x\in I$ に対して，
aとxの間に適当な点 $c=a+\theta(x-a),\ ^\exists\theta\in(0,1)$
が存在して

No.

Date

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k+R_n$$

$$R_n=\frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-a)^n \text{（剰余項）}$$

と表される。 $c=a+\theta(x-a)$

証明

$$F(x)=f(x)-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

$$G(x)=(x-a)^n$$

とおくと

$$F(a)=F'(a)=\cdots=F^{(n-1)}(a)=0,\ F^{(n)}(x)=f^{(n)}(x)$$

$$G(a)=G'(a)=\cdots=G^{(n-1)}(a)=0,\ G^{(n)}(x)=n!$$

平均値の定理の一般化を用いる

aとxの間にc_1が存在して

$$\frac{F(x)}{G(x)}=\frac{F(x)-F(a)}{G(x)-G(a)}=\frac{F'(c_1)}{G'(c_1)}$$

c_1とaの間にc_2が存在して

$$\frac{F'(c_1)}{G'(c_1)}=\frac{F'(c_1)-F'(a)}{G'(c_1)-G'(a)}=\frac{F''(c_2)}{G''(c_2)}$$

$$\frac{F''(x)}{G(x)}$$

このステップをn回くり返すと

c_{n-1}とaの間にc_nが存在し、

$$\frac{F(x)}{G(x)}=\cdots=\frac{F^{(n-1)}(c_{n-1})}{G^{(n-1)}(c_{n-1})}=\frac{F^{(n)}(c_n)}{G^{(n)}(c_n)}=\frac{f^{(n)}(c_n)}{n!}$$

$$F(x)=\frac{f^{(n)}(c_n)}{n!}(x-a)^n=R_n \quad //$$

例 $a=0$ 原点

(1) $$e^x=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{k!}x^k+R_n$$

$$R_n=\frac{e^{\theta x}}{n!} \quad 0<\theta<1$$

(2) $$\sin x=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\frac{1}{(2k-1)!}x^{2k-1}+R_{2n}$$

$$=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\cdots$$

$$R_{2n}=(-1)^n\frac{\sin(\theta x)}{(2n)!}x^{2n}$$

$\cos x$についても同様

剰余項の評価

定理 $a\in I$

fはIでn回微分可能

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k+\tilde{R}_{n+1}$$

とおくと

$$\tilde{R}_{n+1}=o(|x-a|^n)$$

fが$n+1$回微分可能で

$$\sup_{x\in I}|f^{(n+1)}(x)|\leq M$$

ならば

$$|\tilde{R}_{n+1}|\leq\frac{M}{(n+1)!}|x-a|^{n+1}$$

No.

Data

剰余項の評価

f が開区間Iでn回微分可能

$a \in I$ fix　　$f^{(k)}$ 連続 $(k \le n-1)$

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + R_n$$

$$R_n = \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-a)^n \qquad c = a + \theta(x-a)$$
$$(0 < {}^{\exists}\theta < 1)$$

I) $f^{(n)}(x)$　Iで連続

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + T_{n+1}$$

$$T_{n+1} = o\left((x-a)^k\right)$$

$$\left|\frac{T_{n+1}}{(x-a)^k}\right| \to 0 \quad x \to a$$

II) $f^{(n)}(x)$　有界

$$\sup_{x \in I}\left|f^{(n)}(x)\right| \le M < \infty$$

$$\Rightarrow |R_n| \le \frac{M}{n!}|x-a|^n$$

証明　II)は明らか

?

$$\text{I)}\ T_{n+1} = R_n - \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^k$$

$$= \frac{1}{n!}(x-a)^k\left\{f^{(n)}(c) - f^{(n)}(a)\right\}$$

$$x \to a \Rightarrow c \to a \Rightarrow f^{(n)}(c) \to f^{(n)}(a)$$

より明らか

関数のテイラー展開

Taylor expansion

$${}^{\forall}x \in I \quad R_n = R_n(x) \to 0 \ (n \to \infty)$$

ならば　各点 x で

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k \quad \text{となる}$$

定義

一般に、xを変数として

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + \cdots + c_n(x-a)^n + \cdots$$

の形の級数を、aを中心とするxの整級数

べき級数(power series)という。

c_n：係数

定義

$$f : I \to \mathbb{R}$$

Iにおいて

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

の形に表わされるとき、これをfの

aにおける、整級数展開、べき級数展開

テイラー展開という。

右辺をテイラー級数という。

No.

Date

例 $a=0$ (簡易な場合に)

1) $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$

2) $\sin = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}$

3) $\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$

証明

$e^x = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x^k}{k!} + R_n$

$R_n = \frac{(\theta x)^n}{n!}$ 補題より

$|R_n| \leq \frac{(\theta|x|)^n}{n!} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ //

補題 $a>0$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!} = 0$$

証明

$a < n_0 + 1$ となる $n_0 \in \mathbb{N}$ を固定

$n > n_0$ $\frac{a^n}{n!} = \frac{a^{n_0} a^{n-n_0}}{n_0!(n_0+1)(n_0+2)\cdots n}$

$$< \frac{a^{n_0}}{n_0!} \left(\frac{a}{n_0+1}\right)^{n-n_0} \longrightarrow 0$$

$0 < \frac{a}{n_0+1} < 1$ $n \to \infty$

例

4) $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \cdots$ $(|x|<1)$

5) $(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} x^n$

A : 行列

$(I-A)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} A^n$ $(\|A\|<1)$

ノイマン級数

6) $\log(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}$ $(-1 < x \leq 1)$

7) $\arctan x = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{2n-1}$ $(|x| \leq 1)$

証明

4) $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \underbrace{\frac{x^{n+1}}{1-x}}_{R_{n+1}}$

n : パラメータ

$|x| < 1$ だけ

$1 = |1-x+x| \leq |1-x| + |x|$

$\therefore$ $1-|x| \leq |1-x|$

$|R_{n+1}| = \frac{|x|^{n+1}}{|1-x|} \leq \frac{|x|^{n+1}}{1-|x|} \xrightarrow[(|x|<1)]{} 0$ $(n\to\infty)$

5) $|R_n| = \left| \dfrac{\alpha(\alpha-1)\cdots\cdots(\alpha-n+1)}{n!} x^n \right| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$

を示さないで回り道

$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} x^n$ とおいて

右辺のべき級数が収束することを示す。

(一様収束) ⇒ $f(x)$ は連続

$\dfrac{d}{dx}\left\{(1+x)^{-\alpha} f(x)\right\} = 0$ (項別に微分 一様収束

⇒ 微分可能, 連続

$f(x)$ が $(1+x)^{\alpha}$ に等しいことを示す

補題 (ダランベールの判定法)

正項級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ について

$\exists \lim_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = r \in [0, +\infty]$

あるとは限らない
振動など

とする。

1) $r < 1$ ならば $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は収束する
2) $r > 1$ ならば $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は発散する

証明

1) $\forall \varepsilon > 0, \ \exists N_0 = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$

s.t. $n \geq N_0$

$\Rightarrow \left| \dfrac{a_{n+1}}{a_n} - r \right| < \varepsilon$

$r < 1$ だから $r + \varepsilon < 1$ となるように

ε をとる。$(0 < \varepsilon < 1 - r)$ と

$n \geq N_0$ のとき $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} < r + \varepsilon$

$a_{n+1} \leq (r+\varepsilon) a_n$

$a_{N_0} + a_{N_0+1} + \cdots\cdots + a_{N_0+n}$
$\leq a_{N_0}(1 + (r+\varepsilon) + \cdots\cdots + (r+\varepsilon)^n)$
$\leq a_{N_0}(1 + (r+\varepsilon) + \cdots\cdots + (r+\varepsilon)^n + \cdots\cdots)$
$\leq \dfrac{a_{N_0}}{1-(r+\varepsilon)}$

$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = \left(\sum_{k=1}^{N_0-1} + \sum_{k=N_0}^{n}\right) a_k$

$\leq \sum_{k=1}^{N_0-1} a_k + \dfrac{a_{N_0}}{1-(r+\varepsilon)}$: 有界

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は収束

2) $r > 1$ ならば $r - \varepsilon > 1$ となるように

ε をとると $0 < \varepsilon < r - 1$

$\dfrac{a_{n+1}}{a_n} > r - \varepsilon > 1, \ \forall n \geq N_0$

i.e. $a_{n+1} > a_n \geq a_{N_0}$

$\left(\sum a_n \text{ が収束} \Rightarrow a_n \to 0 \ (n \to \infty) \right)$

$\therefore \sum a_n$ は発散

No.

Date

$\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ 収束 $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 収束

$\alpha \in \mathbb{R}$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left|\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n\right|$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{|\alpha||\alpha-1|\cdots|\alpha-n+1|}{n!}|x|^n$$

a_n ←?

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{|\alpha||\alpha-1|\cdots|\alpha-n|}{(n+1)!}\cdot\frac{n!}{|\alpha|\cdots\cdots|\alpha-n+1|}\frac{|x|^{n+1}}{|x|^n}$$

$$=\frac{|\alpha-n|}{n+1}|x| \xrightarrow[n\to\infty]{} |x|<1$$

$\sum_{n=0}^{\infty}\binom{n}{\alpha}x^n$ は絶対収束 ⇒ 収束

次に $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{n}{\alpha}x^{\alpha}$

$\Rightarrow (1+x)\frac{df}{dx}=\alpha f$

を示す

$\Rightarrow \frac{d}{dx}\left\{(1+x)^{-\alpha}f(x)\right\}=0$

$\Rightarrow (1+x)^{-\alpha}f(x)=C$ (定数)

$f(x)=C(1+x)^{\alpha}$

$x=0$ とおくと

$f(0)=1 \quad \therefore C=1$

よって $\boxed{f(x)=(1+x)^{\alpha}}$

No.

Date

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

$x \to (-x)$

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n$$

積分して

$$\log(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}$$

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k x^k + \frac{(-1)^n x^n}{1+x}$$

$$\log(1+x) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k} + R_n$$

$$\begin{aligned} |R_n| &= \left| \int_0^x \frac{(-1)^n t^n}{1+t} dt \right| \\ &\le \left| \int_0^x \frac{|t|^n}{|1+t|} dt \right| \\ &\le \int_0^{|x|} \frac{|t|^n}{1-|t|} dt \end{aligned}$$

$(|x|<1 \quad 1-|x| \le |1+x|)$

$$\le \frac{1}{1-|x|} \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \quad //$$

$x \to x^2$

$$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k x^{2k} + \frac{(-1)^n x^{2n}}{1+x^2}$$

$|x|<1$ でさっきと同様

$$\arctan x = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \frac{x^{2k-1}}{2k-1} + \int_0^x \frac{(-1)^n t^{2n}}{1+t^2} dt$$

積分法

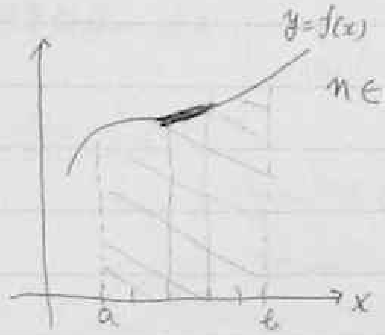
§ リーマン積分 (Riemann) Lebesgue積分

定義

$f(x)$, $[a,b] \to \mathbb{R}$ 有界

$$M = \sup_{a \le x \le b} f(x), \quad m = \inf_{a \le x \le b} f(x)$$

$$m \le f(x) \le M$$



$n \in \mathbb{N}$

分割

$\Delta^{(n)}: a = x_0^{(n)} < x_1^{(n)} < \cdots < x_n^{(n)} = b$

$\Delta^{(n)} = \{x_0^{(n)}, x_1^{(n)}, \cdots, x_n^{(n)}\}$

x_j : 分点

$[x_{j-1}^{(n)}, x_j^{(n)}]$: 細区間

$$\Delta x_j^{(n)} = x_j^{(n)} - x_{j-1}^{(n)}$$

$$M_{\Delta x_j^{(n)}} = \sup_{x \in [x_{j-1}^{(n)}, x_j^{(n)}]} f(x)$$

$$m_{\Delta x_j^{(n)}} = \inf_{x \in [x_{j-1}^{(n)}, x_j^{(n)}]} f(x)$$

No.

Date　~~s~~ S

$$S_{\Delta^{(n)}} = \sum_{j=1}^{n} M_{\Delta_j^{(n)}} \Delta x_j^{(n)}$$

$$s_{\Delta^{(n)}} = \sum_{j=1}^{n} m_{\Delta_j^{(n)}} \Delta x_j^{(n)}$$

⇨ $m(b-a) \le s_{\Delta^{(n)}} \le S_{\Delta^{(n)}} \le M(b-a)$

$\{S_{\Delta^{(n)}}\}_{n,\Delta^{(n)}}$, $\{s_{\Delta^{(n)}}\}_{n,\Delta^{(n)}}$ 有界

実数の無限集合

$$\boxed{\begin{array}{l} {}^{\exists}S = \inf\limits_{n,\Delta^{(n)}} S_{\Delta^{(n)}} \\ s = \sup\limits_{n,\Delta^{(n)}} s_{\Delta^{(n)}} \end{array}}$$

← ?

定理（ダルブーの定理）

分割 $\Delta^{(n)}$ に対して

$$\delta^{(n)} = \max_{1\le j\le n} \Delta x_j^{(n)}$$

とおくと、

もし $n\to\infty$ のとき、$\delta^{(n)}\to 0$ ならば

$${}^{\exists}\lim_{n\to\infty} S_{\Delta^{(n)}} = S$$

$$\lim_{n\to\infty} s_{\Delta^{(n)}} = s$$

$(\Rightarrow s \le S)$

Proof

Sについてのみ考える

Sの定義から　固定

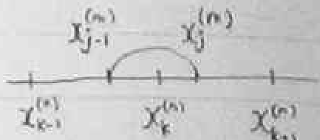
$\forall \varepsilon > 0$, ${}^{\exists}\Delta^{(n)}$ s.t. $S \le S_{\Delta^{n}} \le S+\varepsilon$

$\Delta^{(m)}$ を任意の分割とする $\left(\begin{array}{l}\delta^{(m)}\to 0 \text{ のとき} \\ S_{\Delta^{(m)}} \to S\end{array}\right)$

$\Delta^{(n)}$の分点と$\Delta^{(m)}$の分点を合併して出来る分割を考える。

$m\to\infty$ のとき、$\delta^{(m)}\to 0$

となるように考えると、



十分大きなmに対して

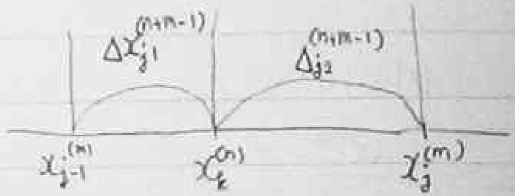
細区間 $(x_{j-1}^{(m)}, x_j^{(m)})$ が

$\Delta^{(n)}$の分点 $x_k^{(n)}$ を高々1つ

含むように出来て

合併を $\Delta^{(n+m-1)}$ と書ける。

$$(x_{j-1}^{(m)}, x_j^{(m)}) = (x_{j-1}^{(m)}, x_k^{(n)}) + (x_k^{(n)}, x_j^{(m)})$$



$$S_{\Delta^{(n+m-1)}} \le S_{\Delta^{(m)}} , \quad S_{\Delta^{(n+m-1)}} \le S_{\Delta^{(n)}}$$

$$M_{\Delta x_j^{(m)}} = \sup_{x\in(x_{j-1}^{(m)}, x_j^{(m)})} f(x)$$

$$M_{\Delta x_j^{(m)}} \Delta x_j^{(m)}$$

$$= M_{\Delta x_j^{(m)}} \left(\Delta x_{j1}^{(n+m-1)} + \Delta_{j2}^{(n+m-1)} \right)$$

$$\ge M_{\Delta x_{j1}^{(n+m-1)}} \Delta x_{j1}^{(n+m-1)} + M_{\Delta_{j2}^{(n+m-1)}} \Delta_{j2}^{(n+m-1)}$$

?

No.

Date

$$0 < M_{\Delta x_j^{(m)}} \Delta x_j^{(m)} - \left(M_{\Delta x_{j1}^{(n+m-1)}} \Delta x_{j1}^{(n+m-1)} + M_{\Delta x_{j2}^{(n+m-1)}} \Delta x_{j2}^{(n+m-1)} \right)$$

$$\leq M_{\Delta x_j^{(m)}} \Delta x_j^{(m)} - m_{\Delta x_j^{(m)}} \underbrace{\left(\Delta x_{j1}^{(n+m-1)} + \Delta x_{j2}^{(n+m-1)} \right)}_{= \Delta x_j^{(m)}}$$

$$= \left(M_{\Delta x_j^{(m)}} - m_{\Delta x_j^{(m)}} \right) \Delta x_j^{(m)} \leq (M+m)\, \delta^{(m)}$$

$$0 < S_{\Delta^{(m)}} - S_{\Delta^{(n+m-1)}} \leq (n+m)(M-m)\,\delta^{(m)}$$

m +分大

$$S_{\Delta^{(m)}} - S_{\Delta^{(n+m-1)}} < \varepsilon$$

$$S_{\Delta^{(n+m-1)}} \leq S_{\Delta^{(m)}}$$

$$0 < S_{\Delta^{(n)}} - S = S_{\Delta^{(m)}} - S + S_{\Delta^{(n+m-1)}} - S_{\Delta^{(m)}} + S_{\Delta^{(m)}} - S_{\Delta^{(n+m-1)}}$$

$$< S_{\Delta^{(n)}} - S + S_{\Delta^{(m)}} - S_{\Delta^{(n+m-1)}} < 2\varepsilon \quad //$$

$$\boxed{S = \inf_n S_{\Delta^{(n)}}}$$

$$S \leq S_{\Delta^{(n)}} \leq S + \varepsilon$$

よって $\displaystyle\lim_{m\to\infty} S_{\Delta^{(m)}} = S$

$m \to \infty$

$\delta^{(m)} \longrightarrow 0$ and

$$\lim_{m\to\infty} S_{\Delta^{(m)}} = S$$

No.

Date

定義

$[a,b]$ の分割 $\Delta^{(n)}$ の 各細区間 $(x_{j-1}^{(n)}, x_j^{(n)})$

内に 任意に $\xi_j^{(n)}$ をとり,

$$S_{\Delta^{n}}(f) = \sum_{j=1}^{n} f(\xi_j^{(m)}) \Delta_j x^{(n)}$$

$$s_{\Delta^{(n)}} \leq S_{\Delta^{n}}(f) \leq S_{\Delta^{(n)}}$$

$$\begin{array}{ccc} \downarrow & & \downarrow \; n\to\infty \; \delta^{(n)}\to 0 \\ s & & S \end{array}$$

$S = s$ ← Riemann積分可能

$\Rightarrow \exists \lim\limits_{\substack{n\to\infty \\ \delta^{(n)}\to 0}} S_{\Delta^{n}}(f)$ 　 f の Riemann積分

$= \int_a^b f(x)\,dx$

定理

閉区間 $[a,b]$ で連続な関数

$f(x)$ は Riemann 積分可能である。

$-\infty < a < b < \infty$

$f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ 有界

$\Delta^{(n)}:\quad a = x_0^{(n)} < x_1^{(n)} < \cdots < x_n^{(n)} = b$

$\Delta^{(n)} = \Delta(x_0^{(n)}, x_1^{(n)}, \cdots, x_n^{(n)})$

$\Delta x_j^{(n)} = x_j^{(n)} - x_{j-1}^{(n)}$

$m \leq f(x) \leq M$

$S_{\Delta^{(n)}} = \sum_{j=1}^{n} \underbrace{\boxed{\sup_{x\in(x_{j-1}^{(n)}, x_j^{(n)})} f(x)}}_{M_j^{(n)}} \Delta x_j^{(n)}$

$s_{\Delta^{(n)}} = \sum_{j=1}^{n} \underbrace{\boxed{\inf_{x\in(x_{j-1}^{(n)}, x_j^{(n)})} f(x)}}_{m_j^{(n)}} \Delta x_j^{(n)}$

$m(b-a) \leq s_{\Delta^{(n)}} \leq S_{\Delta^{(n)}} \leq M(b-a)$

$\mathcal{D}_n = \{\Delta(x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \cdots, x_{n-1}^{(n)}) \mid x_j^{(n)} \in (a,b)\ j=1,2\cdots,n-1\}$

$\mathcal{D} = \bigcup_n \mathcal{D}_n$

$\Delta^{(n)} \in \mathcal{D}$: index の集合

$S_{\Delta^{(n)}}, s_{\Delta^{(n)}}$

⊙ $S \triangleq \inf_{\Delta^{(n)}\in\mathcal{D}} S_{\Delta^{(n)}}$

⊙ $s \triangleq \sup_{\Delta^{(n)}\in\mathcal{D}} s_{\Delta^{(n)}}$

$m(b-a) \leq s \leq S \leq M(b-a)$

$\delta^{(n)} = \max_{1\leq j\leq n-1} \Delta x_j^{(n)}$

$\Rightarrow$

As $n\to\infty$, $\delta^{(n)} \to 0$

$\odot\ S_{\Delta^{(n)}} \to S\ (s_{\Delta^{(n)}} \to s)$

Darboux の定理

ダルブー

$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \Delta^{(n)} \in \mathcal{D} : S \leq S_{\Delta^{(n)}} \leq S + \varepsilon$

$\forall \Delta^{(m)} \in \mathcal{D}$, $\delta^{(m)}$ + 分小,

$\Rightarrow |S_{\Delta^{(m)}} - S| < 2\varepsilon$

$x_{j-1}^{(n)}$ $x_j^{(n)}$

リーマン和

$S_{\Delta^{(n)}}(f) = \sum_{j=1}^{n} f(\xi_j^{(n)}) \Delta x_j^{(n)}$

$\xi_j^{(n)} \in [x_{j-1}^{(n)}, x_j^{(n)}]$

$\xi_j^{(n)} \in [x_{j-1}^{(n)}, x_j^{(n)}]$: arbitrary chosen fix

$s_{\Delta^{(n)}} \leq S_{\Delta^{(n)}}(f) \leq S_{\Delta^{(n)}}$

$\downarrow \quad \downarrow$

$s \leq \square \leq S$

$S = s$

$\Rightarrow \lim_{\substack{n\to\infty \\ (\delta^{(n)}\to 0)}} S_{\Delta^{(n)}}(f) = S = s$

f : Riemann 可積分

$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\substack{n\to\infty \\ (\delta^{(n)}\to 0)}} S_{\Delta^{(n)}}(f)$

f の Riemann 積分

$\int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(x)dx = \cdots$

$^\forall\square\ ^\exists\bigcirc$ s.t. $A \Rightarrow B$

$= \ ^\exists\square\ ^\forall\bigcirc$ s.t. $A \wedge \neg B$

定理 (Bolzano-Weierstrass の定理)

実数の有界列 $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は

(有界な無限集合)

収束する部分列 $\{a_{n'}\}$ を含む

証明

$b_n = \sup_{k\geq n} a_k \searrow$ 有界

$c_n = \inf_{k\geq n} a_k \nearrow$ 有界

$^\exists b = \lim_{n\to\infty} b_n = \overline{\lim_{n\to\infty}}\, b_n$ 上極限

上限の定義から

$^\forall n\in\mathbb{N}$ $\quad ^\exists n' \geq n$

$$\underset{\downarrow\, b}{b_n} - \frac{1}{n} < \underset{\downarrow\, b}{a_{n'}} < \underset{\downarrow\, b}{b_n}$$

$n\to\infty$ にすると $n'\to\infty$

$\therefore$ $\{a_{n'}\}$: 収束列

定義 (一様連続)

I : 区間

$f: I\to\mathbb{R}$ が I上一様連続

とは

if

$^\forall\varepsilon>0,\ ^\exists\delta=\delta(\varepsilon)>0$ s.t. $|x-y|<\delta,\ x,y\in I$

$\Rightarrow |f(x)-f(y)|<\varepsilon$

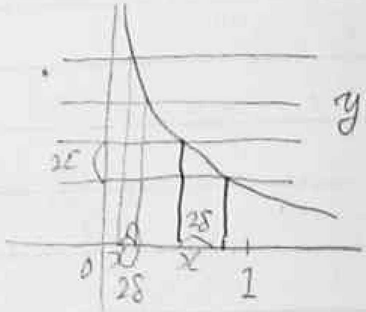
$f: I\to\mathbb{R}$ が I上連続 $\Rightarrow$ $f: I\to\mathbb{R}$ が Iの各点で連続

$f: I\to\mathbb{R}$ が $^\forall x\in I$ で連続

$\Leftrightarrow$ $^\forall x\in I,\ ^\forall\varepsilon>0,\ ^\exists\underline{\delta=\delta(\varepsilon,x)}>0$

s.t. $|x-y|<\delta,\ y\in I$

$\Rightarrow |f(x)-f(y)|<\varepsilon$



$y=\frac{1}{x}$

定理

I : 閉区間

$f: I\to\mathbb{R}$ で連続

$\Rightarrow f: I\to\mathbb{R}$ は一様連続

(閉区間で連続な関数は一様連続)

証明 "背理法" $\quad ^\exists x_\delta, y_\delta\in I$

$^\exists\varepsilon>0,\ ^\forall\delta>0$ s.t. $|x_\delta-y_\delta|<\delta$,

and $|f(x_\delta)-f(y_\delta)|\geq\varepsilon$

($\delta=\frac{1}{n},\ n\in\mathbb{N}$) と考える。

$^\exists\varepsilon>0;\ ^\forall n\in\mathbb{N}\ \ ^\exists x_n, y_n\in I$,

$|x_n-y_n|<\frac{1}{n}$ and $|f(x_n)-f(y_n)|\geq\varepsilon$

I : 閉区間 $\longrightarrow$ 有界

$\{x_n\},\{y_n\}$ … 有界な点列

$\{x_n\}$の中に収束部分列$\{x_n'\}$がある

$\{y_n'\}$は有界だから
収束する部分列がとれる
$\{y_n''\}$

収束　収束

$$\{x_n''\} \subset \{x_n'\} \subset \{x_n\}$$
$$\{y_n''\} \subset \{y_n'\} \subset \{y_n\}$$

$$|x_n'' - y_n''| < \frac{1}{n''}$$
$$\downarrow \quad \downarrow$$
$$|x_0 - y_0| < 0$$

$$|f(x_n'') - f(y_n'')| > \varepsilon$$

一方 f は連続

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n'') = \lim_{n\to\infty} f(y_n'')$$

矛盾

定理

$f : [a,b] \to \mathbb{R}$ は連続 単調(有界)
$\Rightarrow$ f は $[a,b]$ でRiemann積分可能

証明

f は $[a,b]$ で一様連続だから

$\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0$ s.t.
$|x-y| < \delta$, $(a \le x, y \le b)$
$\Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$

$$\Delta^{(n)} : a = x_0^{(n)} < x_1^{(n)} < \cdots < x_n^{(n)} = b$$

を

$$\delta^{(n)} = \max_{1 \le j \le n} \Delta x_j^{(n)} < \delta$$

となるようにとると

$$0 \le \sup_{x_{j-1}^{(n)} \le x \le x_j^{(n)}} f(x) - \inf_{x_{j-1}^{(n)} \le x \le x_j^{(n)}} f(x)$$
$$\le \sup_{x_{j-1}^{(n)} \le x, y \le x_j^{(n)}} |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

$$0 \le S_{\Delta^{(n)}} - s_{\Delta^{(n)}} \le \left(\sum_{j=1}^{n} \Delta x_j^{(n)}\right) \varepsilon = \varepsilon(b-a)$$

よって

$$\lim_{\substack{n\to\infty \\ (\delta^{(n)}\to 0)}} \left(S_{\Delta^{(n)}} - s_{\Delta^{(n)}}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{\lim_{\substack{n\to\infty \\ \delta^{(n)}\to 0}} S_{\Delta^{(n)}}}_{= S} = \underbrace{\lim_{\substack{n\to\infty \\ \delta^{(n)}\to 0}} s_{\Delta^{(n)}}}_{= s}$$

従って $f(x)$ は $[a,b]$ で Riemann 積分可能

f

A(?)集合 $\bigcup_n A_n = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n \cup \cdots$

$\bigcap_n A_n = A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n \cap \cdots$

先週

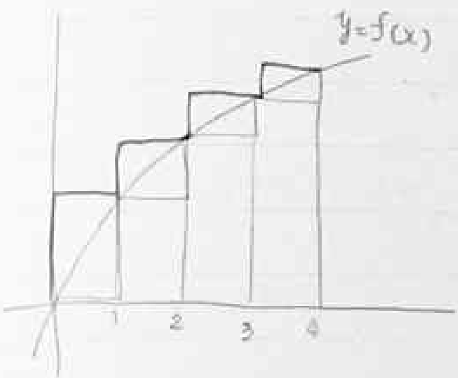
有界

$f(x)$が$[a,b]$で単調 → Riemann積分可能

comment

単調な関数の積分可能性

⇒級数の評価



$$\sum_{k=0}^{n} f(k) < \int_0^n f(x)\,dx < \sum_{k=1}^{n+1} f(k)$$

例 Riemann積分可能でない例

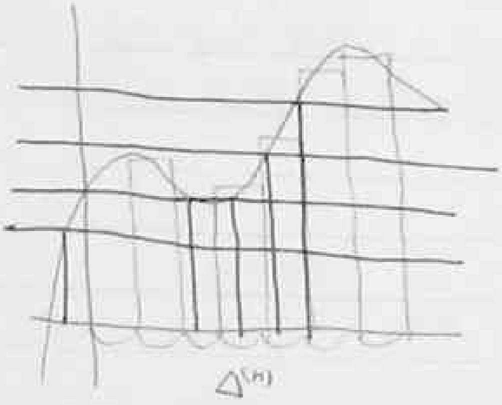
$f: [0,1] \to \mathbb{R}$ defined by

Dirichlet関数 $f(x) \begin{cases} 1 & x\text{が有理数のとき} \\ 0 & x\text{が無理数のとき} \end{cases}$

$$M_{\Delta x_j^{(n)}} = \sup_{x_{j-1} \le x \le x_j} f(x) = 1$$

$$m_{\Delta x_j^{(n)}} = \inf_{x_{j-1} \le x \le x_j} f(x) = 0$$

$$1 = S \neq s = 0$$



◎Lebsegue 関数値を分割

◎Riemann 定義域を分割

定理

$f(x)$は閉区間$[a,b]$でRiemann積分可能で

$m \le f(x) \le M,\ \forall x \in [a,b]$とする。

$g(y)$は閉区間$[m,M]$で連続

⇒ $g(f(x)) = (g \circ f)(x)$は$[a,b]$でRiemann積分可能

証明 $g(y)$は一様連続

$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0$

s.t. $\forall y, z \in [m,M],\ |y - z| < \delta$

$\Rightarrow |g(y) - g(z)| < \varepsilon$

$f(x)$は$[a,b]$でRiemann積分可能

$\forall \mu > 0$ ∃分割$\Delta^{(n)} \in D$ s.t.

$$0 \le S_{\Delta^{(n)}} - s_{\Delta^{(n)}} = \sum_{j=1}^{n} \left(M_{\Delta x_j^{(n)}} - m_{\Delta x_j^{(n)}}\right) \Delta x_j^{(n)} < \mu$$

となる。

そこで $\tilde{M}_{\Delta x_j^{(n)}} = \sup_{x_{j-1}^{(n)} \le x \le x_j^{(n)}} g(f(x)),\ \tilde{m}_{\Delta x_j^{(n)}} = \inf_{x_{j-1}^{(n)} \le x \le x_j^{(n)}} g(f(x))$

$$(0 \le)\, \tilde{S}_{\Delta^{(n)}} - \tilde{s}_{\Delta^{(n)}} = \sum_{j=1}^{n} \left(\tilde{M}_{\Delta x_j^{(n)}} - \tilde{m}_{\Delta x_j^{(n)}}\right) \Delta x_j^{(n)} = (*)$$

を考える。

No

Date

$$\Lambda_+ = \{ j = \{1,2,\cdots,n-1\} \mid M_{\Delta x_j^{(n)}} - m_{\Delta x_j^{(n)}} > \delta \}$$
$$\Lambda_- = \{ j = \{1,2,\cdots,n-1\} \mid M_{\Delta x_j^{(n)}} - m_{\Delta x_j^{(n)}} \leq \delta \}$$

とする。

$(*) = \sum_{j\in\Lambda_+} + \sum_{j\in\Lambda_-}$ と考える。

$$\delta \sum_{j\in\Lambda_+} \Delta x_j^{(n)} \leqq \sum_{j\in\Lambda_+} (M_{\Delta x_j^{(n)}} - m_{\Delta x_j^{(n)}}) \Delta x_j^{(n)}$$
$$\leqq \sum_{j=1}^{n} (M_{\Delta x_j^{(n)}} - m_{\Delta x_j^{(n)}}) \Delta x_j^{(n)}$$
$$< \mu \ (< \varepsilon\delta)$$

$\mu < \varepsilon\delta$ ととると $\sum_{j\in\Lambda_+} \Delta x_j^{(n)} < \varepsilon$

g：閉区間$[m, M]$で連続 ⇒ g：有界

よって
$$\sup_{m\leq y\leq M} |g(y)| \leq K$$
とすると
$$\sum_{j\in\Lambda_+} (\tilde{M}_{\Delta x_j^{(n)}} - \tilde{m}_{\Delta x_j^{(n)}}) \Delta x_j^{(n)}$$
$$\left(= \sum_{j\in\Lambda_+} \left(\sup_{x_{j-1}^{(n)}\leq x\leq x_j^{(n)}} g(f(x)) - \inf g(f(x)) \right) \Delta x_j^{(n)} \right)$$
$$\leqq 2K \sum_{j\in\Lambda_+} \Delta x_j^{(n)} < 2K\varepsilon$$

$j \in \Lambda_-$ $M_{\Delta x_j^{(n)}} - m_{\Delta x_j^{(n)}} \leq \delta$

$$y, z \in [m_{\Delta x_j^{(n)}}, M_{\Delta x_j^{(n)}}] \Rightarrow |g(y) - g(z)| < \varepsilon$$

よって
$$\tilde{M}_{\Delta x_j^{(n)}} - \tilde{m}_{\Delta x_j^{(n)}} \leq \varepsilon \quad \left(\begin{array}{l} |g(f(x)) - g(f(x^*))| < \varepsilon \\ x_{j-1}^{(n)} \leq x, x^* \leq x_j^{(n)} \end{array} \right)$$

したがって
$$\tilde{S}_{\Delta^{(n)}} - \tilde{s}_{\Delta^{(n)}} = \left(\sum_{j\in\Lambda_+} + \sum_{j\in\Lambda_-} \right) (\tilde{M}_{\Delta x_j^{(n)}} - \tilde{m}_{\Delta x_j^{(n)}}) \Delta x_j^{(n)}$$
$$< 2K\varepsilon + \varepsilon \sum_{j\in\Lambda_-} \Delta x_j^{(n)}$$
$$\leq (2K + (b-a))\varepsilon$$

εは任意だから $g(f(x))$は Riemann可積分 □

Riemann積分の性質

1°) 線形性

f, g Riemann可積分 in$[a,b]$ ⇒ $\alpha f + \beta g$: Riemann可積分 in$[a,b]$

$$\int_a^b (\alpha f + \beta g)(x)\,dx = \int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x))\,dx$$
$$= \alpha \int_a^b f(x)\,dx + \beta \int_a^b g(x)\,dx$$

2°) 単調性

$f(x), g(x)$, $[a,b]$で Riemann可積分

$f(x) \leq g(x) \quad \forall x \in [a,b]$

$$\Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx \leqq \int_a^b g(x)\,dx$$

積分演算は順序を保存する
(微分演算はしない)

(2)' 正値性
$f(x) \geq 0$ Riemann可積分 in $[a,b]$
$\Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx \geq 0$

(3) $a < c < b$
$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$

区間に関する加法性

(4) $f, g : [a,b]$ で Riemann可積分
$\Rightarrow fg : [a,b]$ で Riemann可積分

(5) $f : [a,b]$ で Riemann可積分
$\Rightarrow |f(x)| : [a,b]$ で Rieman可積分
$\left| \int_a^b f(x)dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|dx$

(6) $m \leq f(x) \leq M$
$\Rightarrow m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$

証明
(4) $f : g$: Riemann可積分
$\Rightarrow f \pm g$: Riemann可積分
$\Rightarrow (f \pm g)^2$: Riemann可積分
$\Rightarrow \frac{1}{4}((f+g)^2 - (f-g)^2)$
$= fg$: Riemann可積分

(5) $y = |x|$ は連続
f : Rieman可積分 $\Rightarrow |f|$: Rieman可積分 //

$$\lim_{n\to\infty}\int_I f_n(x)dx = \int_I \lim_{n\to\infty} f_n(x)dx = \int_I f(x)dx$$

$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ 一様収束 $\Rightarrow$ O.K.

リーマン積分は条件が厳しい
$\Rightarrow$ ルベーグ積分

不定積分
原始関数
・数値積分
・求積で解ける常微分方程式

定義

$f(x)$は区間Iで有界かつリーマン積分可能
$a, b \in I$, $a < b$ のとき

$$\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx$$

と定義する。

$a \in I$:固定 (下端)

$$F: \underset{\substack{\cap\\ I}}{x} \longmapsto \underset{\substack{\cap\\ \mathbb{R}}}{\int_a^x f(\xi)\,d\xi}$$

を$f(x)$の積分関数, $f(\xi)$を被積分関数
で定義された　　integrand
ξ:積分変数 という。

定理

$f(x)$は区間Iで有界かつRiemann可積分とすると,

(a) $F(x)$はIで連続

(b) $f(x)$が$x \in I$で連続とすると
$F(x)$は$x \in I$で微分可能

$$\frac{d}{dx}F(x) = f(x)$$

証明

(a) $f(x)$はIで有界

$^\exists K > 0$ s.t. $\sup_{x\in I}|f(x)| \le K$

$x \in I$はIの内点とする。

$^\exists \delta > 0$ s.t. $[x-\delta, x+\delta] \subset I$

$|h| \le \delta$とすると

$$\begin{aligned}|F(x+h) - F(x)| &= \left|\int_a^{x+h} f(\xi)d\xi - \int_a^x f(\xi)d\xi\right| \\ &= \left|\int_x^{x+h} f(\xi)d\xi\right| \\ &\le \sup_{x\in I}|f(x)|\left|\int_x^{x+h} 1\,d\xi\right| \\ &\le K|h|\end{aligned}$$

よってFは$x \in I$で連続 $\square$

No.
Date

(b) $x \in I$：内点（固定）
$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta = \delta(\varepsilon, x) > 0$
s.t. $\xi \in I$, $|x-\xi| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(\xi)| < \varepsilon$

すなわち
$f(x) - \varepsilon < f(\xi) < f(x) + \varepsilon$

$\underset{|h|}{\underset{\shortparallel}{|x+h-x|}} \leq \delta$ のとき

$h > 0$ とすると

$$\int_x^{x+h} (f(x)-\varepsilon) d\xi < \int_x^{x+h} f(\xi) d\xi < \int_x^{x+h} (f(x)+\varepsilon) d\xi$$

$$h(f(x)-\varepsilon) \qquad F(x+h) - F(x) \qquad h(f(x)+\varepsilon)$$

$$\Rightarrow f(x) - \varepsilon < \frac{F(x+h)-F(x)}{h} < f(x) + \varepsilon$$

$h < 0$ のときも同様に

$$f(x) - \varepsilon < \frac{F(x+h)-F(x)}{h} < f(x) + \varepsilon$$

すなわち

$$\left| \frac{F(x+h)-F(x)}{h} - f(x) \right| < \varepsilon$$

よって
$F(x)$ は x で微分可能と

$$\frac{d}{dx} F(x) = f(x) \quad \square$$

定義

$f(x)$ は I で定義された関数とする
$(f : I \to \mathbb{R})$

$F(x)$ が $f(x)$ の原始関数（不定積分）というのは，
primitive indefinite integral

$F(x)$ は I 上で微分可能で，
$F'(x) = f(x)$, $x \in I$
となるときをいう。

$f(x)$ の原始関数（不定積分）を

$\int f(x) dx$ と表す。

証明

不定積分
$F(x), G(x)$ を $f(x)$ の原始関数とすると
$F'(x) = f(x) = G'(x)$, $\forall x \in I$
$\Rightarrow (F(x) - G(x))' = 0$, $\forall x \in I$
$\Rightarrow F(x) - G(x) = C$（定数）

$\int_a^x f(\xi) d\xi$ は原始関数の1つ

$$\int f(x) dx = \int_a^x f(\xi) d\xi + C \leftarrow \text{積分定数}$$

定理（微分積分学の基本定理）

$f(x)$ を区間 I で定義された（有界な）Riemann 可積分な関数とする。
$F(x)$ を $f(x)$ の原始関数の1つとすると，

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) \quad a, b \in I$$

となる $\left(= F(x)\Big|_a^b\right)$

No

Date

∵)

$$F(x) = \int_a^x f(\xi)\,d\xi + C$$

となる。 □

__定理__

C: 積分定数

(a) $\alpha \neq -1$

$$\int x^\alpha dx = \frac{1}{\alpha+1} x^{\alpha+1} + C$$

(b) $\int \frac{1}{x} dx = \log|x| + C$

$e^{ikx} = \cos kx + i\sin kx$

(c) $\int e^{kx} dx = \frac{1}{k} e^{kx} + C$ $\quad (e^{ikx})' = ike^{ikx}$

(d) $\int \sin kx\,dx = \frac{-1}{k}\cos kx + C$

$$\int \cos kx\,dx = \frac{1}{k}\sin kx + C$$

(e) $\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = \arcsin\frac{x}{a} + C \quad (a>0)$

$$\int \frac{1}{x^2 + a^2} dx = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + C \quad (a \neq 0)$$

◎ 置換積分

◎ 部分積分 integration parts

__初等関数__

→ 多項式, 有理式, 指数関数(対数関数), 三角関数) その逆関数と代数演算

$\int \frac{dx}{\log x}$, $\int e^{x^2} dx$, $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}$ は初等関数でない

__広義積分__ improper integral

$-\infty \leq a < b \leq +\infty$

$[a, b)$ (^{or} $(a, b]$) で定義された関数

$f(x)$で, $a < {}^\forall c < b$ となる任意の c に対して

$[a, c]$ (^{or} $[c, b]$) で, 有界かつ Riemann 可積分とする。

このとき,

$$\lim_{c \to b-0} \int_a^c f(x)dx \left(\lim_{c \to a+0} \int_c^b f(x)dx \right)$$

が存在するとき, 積分は収束するといい

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{c \to b-0} \int_a^c f(x)dx \left({}^{or} \lim_{c \to a+0} \int_c^b f(x)dx \right)$$

$$\left(\lim_{\substack{c_1 \to a+0 \\ c_2 \to b-0}} \int_{c_1}^{c_2} f(x)dx = \int_a^b f(x)dx \right)$$

極限が存在しないとき, 積分は発散するという。

例)

$\alpha > 0, \ \varepsilon > 0$

$$\int_0^{1-\varepsilon} \frac{1}{(1-x)^\alpha} dx = \frac{-1}{1-\alpha}(1-x)^{1-\alpha} \Big|_0^{1-\varepsilon}$$

$$= \frac{-1}{1-\alpha}\varepsilon^{1-\alpha} + \frac{1}{1-\alpha}$$

$0 < \alpha < 1 \Rightarrow$ 収束

$\alpha > 1 \Rightarrow$ 発散

$\alpha = 1$

$$\int_0^{1-\varepsilon} \frac{1}{1-x}\,dx = -\log(1-x)\Big|_0^{1-\varepsilon}$$

$= -\log \varepsilon$ 発散

定義

$\int_a^b |f(x)|\,dx$ が収束するとき

$\int_a^b f(x)\,dx$ は絶対収束するという。

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx$$

より 絶対収束 $\Rightarrow$ 収束

$\int_a^b f(t)\,dt$ が収束 $\Leftrightarrow$

$$F(x) = \int_a^x f(x)\,dx$$

としたとき

$\lim_{x \to b} F(x)$ が収束

$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0$ s.t. $x, x' \in [a, b]$

$b - \delta < x < x' < b$

$\Rightarrow |F(x) - F(x')| < \varepsilon$

$\Leftrightarrow b = \pm\infty$ とき

$\forall \varepsilon > 0, \exists M = M(\varepsilon) > 0$ s.t.

$M < x < x'$

$|F(x) - F(x')| < \varepsilon$

例) $\int_0^\infty \frac{\sin t}{t}\,dt$ 収束 上から[illegible]

$\int_0^\infty \frac{|\sin t|}{t}\,dt$ 発散

$\int_0^\infty \frac{\sin t}{t}$ は条件収束する。