基礎と応用 微分積分 I, II
理論中心
金子晃著 サイエンス社

テストは教科書から

1 数列の極限と連続性

No

Date

1. 実数

natural numbers $\mathbb{N}$: 自然数の全体　$n \in \mathbb{N}$: nは自然数　$\in$: is an element of

1, 2, 3, …　0を含めない

Zahlen $\mathbb{Z}$: 整数

$\mathbb{Z}_+$ 正整数 $(=\mathbb{N})$

$\mathbb{Z}_-$ 負整数

$\mathbb{Z} = \mathbb{Z}_+ \cup \{0\} \cup \mathbb{Z}_-$

Quotient $\mathbb{Q}$: 有理数

$(p, q) \leftrightarrow \frac{p}{q}$　$(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_+$

$q > 0$

ペア $(p, q) \overset{同じ}{\sim} (r, s)$

$\left[\frac{p}{q} = \frac{r}{s}\right]$

$ps = qr$

同値関係

同値類

$(p, 1) \leftrightarrow p \in \mathbb{Z}$

同じと思う

$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$

代数方程式の解(根)　$\left.\begin{matrix}\pi \\ e\end{matrix}\right\}$ 超越数　trancendental number

$\sqrt{2}$　$x^2 = 2$

代数的実数 (有理数を係数とする方程式の解)

$\longrightarrow$ 数直線

◦濃度 $\mathbb{Q}$ 可算

real number $\mathbb{R}$: 実数　非可算　$\underset{対角線論法}{カントール}$

No.

Date

○デデキントの切断
○コーシー列の同値類

実数の公理系 field

I) 四則演算（実数は体をなす）

加法(+) 乗法(×)

1) 結合律

$a, b, c \in \mathbb{R}$

$(a+b)+c = a+(b+c)$

$(a \times b) \times c = a \times (b \times c)$

2) 可換律

$a+b = b+a$

$a \times b = b \times a$

3) 単位元の存在

$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{加法}}}{0}$ $\underset{\substack{\uparrow \\ \text{乗法}}}{1}$ $\in \mathbb{R}$ があって

すべての $a \in \mathbb{R}$ に対して

$a+0 = a$

$a \times 1 = a$

4) 逆元の存在

すべての $a \in \mathbb{R}$ について
(任意)

$a+b=0$ 1つだけ

となる $b \in \mathbb{R}$ がある。

b を $-a$ とかく

(減法)

すべての $a \in \mathbb{R}^*$ に対して Rから0を除く

$a \times b = 1 \leftarrow \mathbb{R} \setminus \{0\}$

となる $b \in \mathbb{R}$ がある [illegible]

この b を $\dfrac{1}{a}$ とかく

5) 分配律

$a \times (b+c) = a \times b + a \times c$

注1 積×は省略するか・で表すことが多い

注2 $\mathbb{Q}$ や $\{0, 1\}$ は公理I
をみたす

公理II 四則演算と両立する
全順序が存在する。
($\mathbb{R}$ は順序体をなす)

すべての $a, b \in \mathbb{R}$ に対して
$a \leq b$ または $b \leq a$
が成立する。

1) $a \leq b \Rightarrow a+c \leq b+c$
2) $a \leq b,\ 0 \leq c \Rightarrow a \times c \leq b \times c$

$a \leq b$ のとき $b \geq a$ とも書く
a is less than or equal to b
b is greater than or equal to a

不等式(順序)
I) 反射律 $a \leq a$
II) 反対称律 $a \leq b$ かつ $b \leq a$ ならば $a = b$
III) 推移律 $a \leq b,\ b \leq c \Rightarrow a \leq c$

公理III (連続性の公理)

上に/下に 有界な単調列は収束する。

単調な(実)数列

単調増加あるいは単調減少

定義
[数列]: 写像 $f: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ を
($\mathbb{N}$ から $\mathbb{R}$ への写像)

$$\begin{array}{ccc} n & \longmapsto & f(n) \\ \uparrow & & \uparrow \\ \mathbb{N} & & \mathbb{R} \end{array}$$

(元 n を $f(n)$ に写す)

(実)数列という

像 $f(n)$ を a_n と書く
数列 f を $\{a_n\}$ とか $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$
写像
とか $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$
$a_1, a_2, a_3, \cdots$ とか書く

[有界]: すべての $n \in \mathbb{N}$ に対して
$a_n \leq M$
となる $M \in \mathbb{R}$ が存在するとき、
数列 $\{a_n\}$ は上に有界であるという。

[単調] すべての $n \in \mathbb{N}$ に対して
$a_n \leq a_{n+1}$
となるとき 数列 $\{a_n\}$ は単調増加
であるという

No.

Date

[収束] (ε-N論法)

実数列$\{a_n\}$が$a \in \mathbb{R}$に収束するというのは、どんなに(小さな)正数εをとっても、あるεに依存する番号N_εがとれて、$n \geqq N_\varepsilon$ならば、

$$|a_n - a| < \varepsilon$$

となるときをいう

For any $\varepsilon > 0$ there exists a number $\underset{N=N(\varepsilon)}{N_\varepsilon} \in \mathbb{N}$ such that $n \geqq N_\varepsilon$
$\Rightarrow |a_n - a| <$

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ s.t. $n \geqq N_\varepsilon \Rightarrow |a_n - a| < \varepsilon$

$\forall$: for any (all)

$\exists$: there exists a

$\Rightarrow$: if…, then (imply)

例1

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e = 2.718281828\cdots$$

∵) 単調増加　2項定理

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(\frac{1}{n}\right)^k = \sum_{k=0}^{n} {}_nC_k \frac{1}{n^k} = 1+1+\sum_{k=2}^{n} {}_nC_k \frac{1}{n^k}$$

$${}_nC_k \frac{1}{n^k} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!\, n^k} \qquad \left(\prod_{k=1}^{n} a_k = a_1 a_2 \cdots a_n\right)$$

$$= \frac{1}{k!}\prod_{j=0}^{k-1}\left(1-\frac{j}{n}\right) < \frac{1}{k!}\prod_{j=0}^{k-1}\left(1-\frac{j}{n+1}\right) = {}_{n+1}C_k \frac{1}{(n+1)^k}$$

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 1+1+\sum_{k=2}^{n} {}_{n+1}C_k \frac{1}{(n+1)^k}$$

$$< 1+1+\sum_{k=2}^{n+1} {}_{n+1}C_k \frac{1}{(n+1)^k} = \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}$$

∵) 上に有界

$${}_nC_k \frac{1}{n^k} = \frac{1}{k!}\prod_{j=0}^{k-1}\left(1-\frac{j}{n}\right)$$

$$< \frac{1}{k!} < \frac{1}{2^{k-1}}$$

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 1+1+\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{2^{k-1}} < 1+\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2^k}$$

$$= 1+\frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 3$$

No.

Date

例2

$a_n = \left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\right) - \log n$

$^{\exists}\lim_{n\to\infty} a_n = \gamma = 0.5772\cdots$

オイラーの定数

Euler

収束の証明 $x = 1+\frac{1}{n}$

$\left(\frac{x-1}{x} < \log x < x-1 \quad \forall x>1\right)$

$\frac{1}{n+1} < \log\left(1+\frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n}$

$a_{n+1} - a_n = \frac{1}{n+1} - \log(n+1) + \log n$

$= \frac{1}{n+1} - \log\left(1+\frac{1}{n}\right) < 0$

∴ 単調減少

$a_n > \log(1+1) + \log\left(1+\frac{1}{2}\right) + \cdots + \log\left(1+\frac{1}{n}\right) - \log n$

$= \log(1+n) - \log n = \log\left(1+\frac{1}{n}\right) > 0$

∴ 下に有界

注 オイラーの定数 $\in \mathbb{R}$

は有理数か無理数

か超越数かは unknown

上界 下界

上限 下限

X: 順序集合

$A \subset X,\ A \neq \phi$

定義

Aが上に有界

(下に)

if $^{\exists}b \in X$ s.t.

$x \leq b \ (x \geq b)\ ^{\forall}x \in A$

Aに属するすべての元

xに対して

$x \leq b \ (x \geq b)$

となる X の元 b が存在するとき,

Aは上に(下に)有界であるという

A is bounded from above

if that $^{\exists}$exists a $b \in X$

such that $x \leq b$, for any $x \in A$

b : Aの上界 (upper bound)

上限: 上界のうちで最も小さい(大きい)ものを

下限 上限といい $\sup A$ とかく ($\inf A$) least upper bound, greatest lower bound

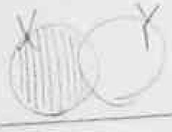
$a = \sup A \in X$

if (1) $x \leq a,\ ^{\forall}x \in A$

(2) $^{\forall}c < a,\ ^{\exists}x \in A,\ c < x$

(cは上界でない)

$X \setminus Y = X \cap Y^c$



連続性の公理

上に有界な実数の
集合は上限をもつ

補足

$\mathbb{Q}$を含む順序体で,
そのすべての有界な集合が
上限をもつようなものが存在する。
その元を実数とよぶ。

デデキントの切断

(1) $\mathbb{Q} = \alpha \cup \alpha'$ ①←補集合, $\alpha \cap \alpha' = \phi$

$\alpha \neq \phi,\ \alpha' \neq \phi$

(2) $x \in \alpha\ \ y \in \alpha' \Rightarrow x < y$

$r \in \mathbb{Q}$

$r^* = \{a \in \mathbb{Q} \mid a \leqq r\}$

$r \leftrightarrow r^*$, 1対1 同一視

$\mathbb{R} = \{\alpha \in 2^{\mathbb{Q}} \setminus \{\phi\} \mid$ デデキントの切断 $\}$ ←$\mathbb{Q}$の部分集合全体

順序

$\alpha, \beta \in \tilde{\mathbb{R}}$ $\qquad \tilde{\mathbb{R}}_+ = \{\alpha \in \tilde{\mathbb{R}} \mid \alpha > 0^*\}$

$\alpha \leqq \beta \Leftrightarrow \alpha < \beta$

和 $\alpha, \beta \in \tilde{\mathbb{R}}$

$\alpha + \beta = \{x + y \mid x \in \alpha, y \in \beta\}$

積 $\alpha \times \beta = \{xy \mid x \in \alpha, y \in \beta\}$

$\alpha, \beta \in \tilde{\mathbb{R}}_+$

数列

$\{a_n\}\{b_n\}$ $\quad n \longmapsto a_n + b_n$

$$\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n$$

$$\lim_{n\to\infty}(a_n\cdot b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \lim_{n\to\infty} b_n$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{\lim_{n\to\infty} a_n}{\lim_{n\to\infty} b_n}$$

$$\left(\lim_{n\to\infty} b_n \neq 0\right)$$

$\boxed{\text{定理}}$

数列$\{a_n\}$が収束

$\Rightarrow \{a_n\}$は有界

if, then
imply
ならば

〈証明〉 $\boxed{\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha}$

$\overset{def}{\Longleftrightarrow}$ $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$

s.t. $n \geq N \Rightarrow |a_n - \alpha| < \varepsilon$

$\varepsilon = 1$ とする $\quad n \geq N(1)$

$$|a_n - \alpha| < \varepsilon$$

$$|a_n| \leq |a_n - \alpha| + |\alpha|$$

$$\leq \varepsilon + |\alpha|$$

$$M \triangleq \max\{|a_1|, |a_2|, \cdots, |a_{N-1}|, \varepsilon + |\alpha|\}$$

$\rightarrow \quad |a_n| \leq {}^{\exists}M$

すなわち $\{a_n\}$は有界

注 $\{a_n\}$が有界でなければ、$\{a_n\}$は発散

$\rightarrow$ $\log n$：有界でない、$\{\log n\}$は収束しない

$$\underbrace{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots\cdots+\frac{1}{n}} - \log n \rightarrow \gamma$$

収束

$\Rightarrow$ 調和数列 $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}$ は収束しない。

$\boxed{\text{定義}}$

数列$\{a_n\}$がコーシー列(Cauchy sequence)

であるとは

$n, m \rightarrow \infty$のとき $|a_n - a_m| \rightarrow 0$

$$\left(\lim_{n,m\to\infty}(a_n - a_m) = 0\right)$$

$\boxed{\text{定理}}$

コーシー列は有界である

〈証明〉

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$

s.t. $n, m \geq N(\varepsilon)$

$\Rightarrow |a_n - a_m| < \varepsilon$

$\varepsilon = 1 \quad N = N(1) = m$ とる

$|a_n - a_{N(1)}| < \varepsilon, \ \forall n \geq N(1)$

$|a_n| \leq |a_{N(1)}| + 1 \quad n \geq N(1)$

$$M = \max\{|a_1|, |a_2|, \cdots |a_{N-1}|, |a_N| + 1\}$$

$|a_n| \leq M \quad \forall n \in \mathbb{N}$

すなわち $\{a_n\}$は有界

$\boxed{\text{定理}}$

$\{a_n\}$は収束列

$\Leftrightarrow \{a_n\}$はコーシー列である。

if and only if (iff)

必要十分条件

No.

Date

〈証明〉

⇨) $\{a_n\}$は収束列

$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha \in \mathbb{R}$

$\forall \varepsilon > 0,\ ^{\exists}N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$

s.t. $n \geq N \Rightarrow |a_n - \alpha| < \varepsilon$

$m \geq N \Rightarrow |a_m - \alpha| < \varepsilon$

$$|a_n - a_m| = |a_n - \alpha + \alpha - a_m|$$
$$\leq |a_n - \alpha| + |a_m - \alpha|$$

$\forall \varepsilon > 0,\ ^{\exists}N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N},\ n, m \geq N$

$\Rightarrow |a_n - a_m| < \underline{2\varepsilon}$ ε'

よって$\{a_n\}$はコーシー列

⇦) コーシー列は収束する

〃単調な有界列は収束

$\{a_n\}$: コーシー列　nが増えると1個ずつ減るので小さくなる

$b_n = \sup_{k \geq n} a_k = \sup\{a_n, a_{n+1}, a_{n+2} \cdots\}$

・$\{b_n\}$は単調減少列 有界

よって $\exists b = \lim_{n\to\infty} b_n$

$\{a_n\}$はコーシー列だから

$\forall \varepsilon > 0,\ ^{\exists}N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N},\ n, m \geq N(\varepsilon)$

$(\Rightarrow |a_n - a_m| < \varepsilon)$　$-\varepsilon < a_n - a_m < \varepsilon$

$\Rightarrow a_n - \varepsilon < a_m < a_n + \varepsilon$ (※)

mについてsupをとると

$\Rightarrow_{\leq} b_m < a_n + \varepsilon \quad \forall m, n \geq N(\varepsilon)$

$a_n - \varepsilon$ 忘れた

ここでm→∞とすると

$\Rightarrow a_n - \varepsilon < b < a_n + \varepsilon \quad \forall n \geq N(\varepsilon)$

$\Rightarrow |a_n - b| < \varepsilon \quad \forall n \geq n(\varepsilon)$

よって

$\lim_{n\to\infty} a_n = b$

(注)　supの逆

$c_n = \inf_{k \geq n} a_k = \inf\{a_n, a_{n+1}, a_{n+2} \cdots\}$

単調増加列 有界 $\lim_{n\to\infty} c_n = C$

$\lim_{n\to\infty} a_n = C = b$

(注) $\{a_n\}$数列

sup → $\overline{\lim_{n\to\infty}} a_n = \limsup_{n\to\infty} a_n \overset{\text{てーぎ}}{\triangleq} \lim_{n\to\infty} \sup_{k \geq n} a_k$
$= \inf_n \sup_{k \geq n} a_k$　上極限

$\underline{\lim_{n\to\infty}} a_n = \liminf_{n\to\infty} a_n \triangleq \lim_{n\to\infty} \inf_{k \geq n} a_k$
$= \sup_n \inf_{k \geq n} a_k$　下極限

No.

Date

例)

$$\begin{cases} a_n = \dfrac{a_{n-1}+2}{2a_{n-1}+5} \quad (n=2,3,\cdots) \\ a_1 = \alpha \in \overline{\mathbb{R}_+} = [0,\infty) \end{cases}$$

$a_n \geq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$$a_n = \frac{1}{2} - \frac{1}{2(2a_n+5)} < \frac{1}{2}$$

$$|a_{n+1}-a_n| = \frac{1}{(2a_n+5)(2a_{n-1}+5)}|a_n - a_{n-1}|$$

$$\leq \frac{1}{25}|a_n - a_{n-1}|$$

$m<n$

$$|a_m - a_n| \leq |a_m - a_{m+1}| + |a_{m+1} - a_{m+2}| + \cdots + |a_{n-1} - a_n|$$

$$\leq \left\{\left(\frac{1}{25}\right)^{m-1} + \left(\frac{1}{25}\right)^{m} + \cdots + \left(\frac{1}{25}\right)^{n-2}\right\}|a_2 - a_1|$$

$$= \left(\frac{1}{25}\right)^{m-1}\left\{1 + \left(\frac{1}{25}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{25}\right)^{n} + \cdots\right\}|a_2 - a_1|$$

$$\leq \left(\frac{1}{25}\right)^{m-2}|a_2 - a_1| \longrightarrow 0$$

$(n, m \to \infty)$

$$\alpha = \lim_{n\to\infty} a_n$$

$$\alpha = \frac{\alpha+2}{2\alpha+5}$$

$$\Leftrightarrow 2\alpha^2 + 5\alpha = \alpha + 2$$

$$\alpha^2 + 2\alpha - 1 = 0$$

$$\therefore \alpha = -1+\sqrt{2}$$

級数 series

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \cdots\cdots$$

第n部分和

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$$

infinite series $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge

無限級数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$が収束する

$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $\{S_n\}$が収束する

diverge

収束しない級数は発散する

$\boxed{\text{定理}}$ (コーシーの判別法)

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$が収束する

$$\Leftrightarrow \sum_{k=m+1}^{n} a_k \to 0 \quad \begin{pmatrix} n, m \to \infty \\ n \geq m \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}, n, m \geq N$$

$$\Rightarrow \left|\sum_{k=m+1}^{n} a_k\right| < \varepsilon$$

No.

Date ④

定理 (Cauchyの判定条件)

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が収束 $\Leftrightarrow {}^{\forall}\varepsilon > 0, {}^{\exists}N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$

s.t. $n, m \geq N \Rightarrow \left|\sum_{k=m+1}^{n} a_k\right| < \varepsilon$ (※)

$(n \geq m)$

$\Leftrightarrow \sum_{k=m+1}^{n} a_k \to 0 \ (\text{as } n, m \to \infty)$

証明

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ が収束 $\Leftrightarrow \{S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k\}$ が収束列

$\Leftrightarrow \{S_n\}$ がCauchy列

系 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が収束 $\Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = 0$

∵) (※)で $n = m+1$ とおくと

${}^{\forall}\varepsilon > 0, {}^{\exists}N \in \mathbb{N}, n \geq N$

$\Rightarrow |a_n| < \varepsilon$

定義

$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| < +\infty$ のとき $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ は

絶対収束するという

absolutely convergent

定理

$\sum a_n$ が絶対収束

$\Rightarrow \sum a_n$ は収束

∵) 三角不等式より

(※) $\left|\sum_{k=m+1}^{n} a_k\right| \leq \sum_{k=m+1}^{n} |a_k|$

より明らか

定義

絶対収束しないが収束する

級数は条件収束するという。

定義

級数 $\sum a_n$ において，すべての $n \in \mathbb{N}$ について

$a_n \geq 0$ となる級数を正項級数という。

定理 正項級数が収束するための

必要十分条件は，その第n部分和

の作る数列が有界なことである。

系 $\sum a_n, \sum b_n$：正項級数

${}^{\exists}M > 0$ s.t. $a_n \leq M b_n \quad {}^{\forall}n \in \mathbb{N}$

Then (a) $\sum b_n$ が収束 $\Rightarrow \sum a_n$ も収束

(b) $\sum a_n$ が発散 $\Rightarrow \sum b_n$ も発散

定義

${}^{\forall}n \in \mathbb{N}, \ a_n \geq 0$

$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$

の形の級数を交代級数という。

定理 a_n が単調にゼロに収束

$(a_n \geq a_{n+1}, \ {}^{\forall}n \in \mathbb{N} \quad \lim_{n\to\infty} a_n = 0)$

とすると

$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$ は収束する

No.

Date

証明

第n部分和を

$S_n = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k}a_k = a_1 - a_2 + \cdots + (-1)^{n-1}a_n$

とすると

$n=2m$ のとき

$S_{2m} = \underset{\overset{\text{IV}}{0}}{(a_1 - a_2)} + \cdots + \underset{\overset{\text{IV}}{0}}{(a_{2m-1} - a_{2m})} > 0$

$\{S_{2m}\}$ 単調増加, 非負

$n=2m-1$ のとき

$S_{2m-1} = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \cdots - a_{2m-2} + a_{2m-1}$

$= a_1 - \underset{\overset{\text{IV}}{0}}{(a_2 - a_3)} - \underset{\overset{\text{IV}}{0}}{(a_4 - a_5)} \cdots - \underset{\overset{\text{IV}}{0}}{(a_{2m-2} - a_{2m-1})}$

$= \underset{\overset{\text{IV}}{0}}{(a_1 - a_2)} + \cdots + \underset{\overset{\text{IV}}{0}}{(a_{2m-3} - a_{2m-2})} + a_{2m-1} \geq 0$

$\{S_{2m-1}\}$ 単調減少, 非負

同様にして

$\forall j, k \in \mathbb{N}$

$S_{2j+1} - S_{2k} \geq 0$

m 偶数 $m \leq n$ とする

n 奇数のとき

$0 < S_n - S_m = \sum_{k=m+1}^{n}(-1)^{k-1}a_k = S_n - (S_{n+1} - a_{m+1}) \leq a_{m+1}$

n: 偶数のとき $S_n - S_{m+1} < 0$

$0 < S_n - S_m \leq a_{m+1}$ $\therefore |S_n - S_m| < a_{m+1} \to 0$

同様に m, 奇数 $m<n$ とすると

$|S_n - S_m| \leq a_{n+1}$

となり

$\lim_{m\to\infty} a_m = 0$

よって $\{S_n\}$: Cauchy 列

例

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots = +\infty$ 発散

(2) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \cdots = \log 2$

$\because$) (1) $\gamma = \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \log n\right)$

$\log n$ 発散より $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ は発散

(2) $\{a_n = \frac{1}{n}\}$

$a_n \geq a_{n+1}$ $\lim a_n = 0$

(条件)収束する

$S_n = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\frac{1}{k}$ と

$d_m = \sum_{k=1}^{m}\frac{1}{m+k} = \frac{1}{m+1} + \cdots + \frac{1}{2m}$

$e_m = \sum_{k=1}^{m}\frac{1}{m+k-1}$

とおくと

$d_m = S_{2m}$, $e_m = S_{2m-1}$ となる。

$d_m = \sum_{j=1}^{m-1}(d_{j+1} - d_j) + d_1$

$= \sum_{j=1}^{m-1}\left(\sum_{k=1}^{j+1}\frac{1}{j+1+k} - \sum_{k=1}^{j}\frac{1}{j+k}\right) + d_1$

$= \sum_{j=1}^{m-1}\left(\frac{1}{2(j+1)} + \frac{1}{2j+1} - \frac{1}{j+1}\right) + d_1$

No.

Date

$$= \sum_{j=1}^{n-1}\left(\frac{1}{2j+1} - \frac{1}{2(j+1)}\right) + \frac{1}{2}$$

$$= S_{2m} \qquad \sum_{k=m+1}^{2m}\frac{1}{k}$$

$$S_{2m} = d_m = \sum_{k=1}^{2m}\left(\frac{1}{k} - \log(2m)\right) - \sum_{k=1}^{m+1}\left(\frac{1}{k} - \log(m+1)\right)$$

$$+ \log 2 + \log\frac{m}{m+1}$$

$$\xrightarrow[n\to\infty]{} \gamma - \gamma + \log 2 = \log 2$$

(同様に $S_{2m-1} \to \log 2$)

例
$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!} \ (= e)$$

∵) 収束性

$$\frac{1}{2!} = \frac{1}{2\cdot 1} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{3!} = \frac{1}{3\cdot 2\cdot 1} \leq \frac{1}{2^2}$$

$$\frac{1}{n!} < \frac{1}{2^{n-1}}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^{n-1}} < +\infty$$

よって $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}$ は収束

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n} {}_nC_k\left(\frac{1}{n}\right)^k = 1+1+\sum_{k=2}^{n} {}_nC_k\left(\frac{1}{n}\right)^k$$

$$= 1+1+\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k!}\prod_{i=0}^{k-1}\left(1-\frac{i}{n}\right)$$

$$< \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}$$

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \leq \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!} \quad (1)$$

$\forall r < \mathbb{N}$ fix $\forall n \geq r$

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n > 1+1+\sum_{k=2}^{r}\frac{1}{k!}\prod_{i=0}^{k-1}\left(1-\frac{i}{n}\right)$$

$$e \geq 1+1+\sum_{k=2}^{r}\frac{1}{k!} \quad {}^{\forall} r \in \mathbb{N}$$

$r \to \infty$ とすると

$$e \geq \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!} \quad (2)$$

(1), (2) より

$$e = \sum_{k=0}^{N}\frac{1}{k!}$$

○ Euler

$$\log 2 = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n n}$$

2進数展開

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$a_n \in \{0, 1\}$$

○ 1997

Bailley, Borwein, Plouffe

$$\pi = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{16^n}\left(\frac{4}{8n+1} - \frac{2}{8n+4} - \frac{1}{8n+5} - \frac{1}{8n+6}\right)$$

No.
Date

(5)

§ 関数の極限と連続性

$D \subset \mathbb{R}$

定義域 domain

$f: D \longrightarrow \mathbb{R}$ 一価写像

$x \longmapsto f(x)$ を関数

$(f: x \longmapsto f(x))$

ベクトル

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, \cdots\cdots, x_n) \mid x_j \in \mathbb{R}\}$$

$D \subset \mathbb{R}^n$

$f: D \to \mathbb{R}$ 多変数実数値関数という

$x \mapsto f(x)$

ベクトル

x: 独立変数 $y = f(x)$ 従属関数

$\{y = f(x) \mid x \in D\}$ fの値域 range

§§ いろいろな関数

[古典的関数]

1. 多項式

$$p(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots\cdots + a_{n-1} x + a_n$$

$$a_j \in \mathbb{R} \quad n \in \mathbb{N}$$

2 有理関数 rational functions

$\frac{p(x)}{g(x)}$, $p(x), g(x)$ 多項式

3 代数関数 algebraic functions

$$a_0(x) y^n + a_1(x) y^{n-1} + \cdots\cdots + a_{n-1}(x) y + a_n(x) = 0$$

($a_j(x)$: 多項式を変数とする代数方程式

これの根として得られる関数

例えば, $y = (1 - x^2)^{\frac{3}{2}}$ $y = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$ 等

逆関数も代数関数

4. 超越関数

代数関数でない関数

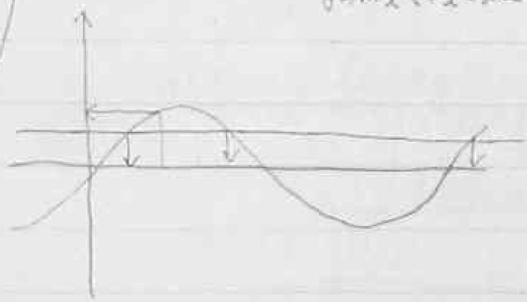
そのうち, 三角関数, 指数関数, 対数関数, 逆三角関数

→ 初等超越関数 + 代数関数の四則演算でそれらの合成

$e^{\sin x}, e^{x^2}, \sin\left(\frac{\cos x}{x}\right)$

逆三角関数

$y = \sin x \Leftrightarrow x = \arcsin y$



双曲線関数

$$\sinh = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

Euler の公式

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x \in \mathbb{C}$$

$$\left(= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ix)^n}{n!}\right)$$

$$\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

$$\tan x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{e^{ix} + e^{-ix}}$$

No.

Date

[古典的でない関数]

$$x_+ \overset{\text{def}}{=} \begin{cases} 0 & x<0 \\ x & x \geqq 0 \end{cases}$$

$$x_- \overset{\text{def}}{=} \begin{cases} x & x \leqq 0 \\ 0 & x>0 \end{cases}$$

$$|x| = \begin{cases} -x & x \leq 0 \\ x & x>0 \end{cases}$$

$$\mathrm{sgn}(x) = \begin{cases} -1 & (x<0) \\ 1 & (x>0) \\ 0 & x=0 \end{cases}$$ 符号関数

$$Y(x) = \begin{cases} 0 & (x<0) \\ 1 & (x>0) \\ \frac{1}{2} & x=0 \end{cases}$$ Heaviside関数 ステップ関数

$$\chi_{[a,b]}(x) = \begin{cases} 1 & x \in [a,b] \\ 0 & x \notin [a,b] \end{cases}$$

区間$[a,b]$の特性関数

Characteristic Function

関数の極限

定義 $a \in \mathbb{R}$, $r>0$

開区間$(a-r, a+r)$を aのr近傍という。

$]a-r, a+r[$

定義

$a \in \mathbb{R}$

aのr近傍からaを除いた集合で定義された

関数f, すなわち.

$f : \{x,\ 0<|x-a|<r\} \to \mathbb{R}$

において, fの定義域内のxが

aと異なる値をとりながらaに近づくとき,

$f(x)$がαにいくらでも近づくとき

$x \to a$のとき $f(x)$は極限値αに

収束するといい,

$x \to a$のとき $f(x) \to \alpha$

とか $\lim_{x\to\infty} f(x) = \alpha$ と書く

正確に書いて

$\forall \varepsilon>0,\ ^\exists \delta = \delta(\varepsilon)>0$ s.t. $0<|x-\alpha|<\delta$

$\Rightarrow |f(x) - \alpha| < \varepsilon$

定義 $x \to a$ のとき $f(x) \to \underset{(-)}{+}\infty$

or $\lim_{x\to a} f(x) = \underset{(-)}{+}\infty$

$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}\ ^\forall M>0,\ ^\exists \delta = \delta(M)>0$ s.t. $0<|x-a|<\delta$

$\Rightarrow f(x) > M$
$(<-M)$

定理 $\lim_{x\to a} f(x)=\alpha \quad \lim_{x\to a} g(x)=\beta$

$\Rightarrow$ (1) $\lim_{x\to a}(f(x)+g(x))=\lim_{x\to a}f(x)+\lim_{x\to a}g(x)$

$=\alpha+\beta$

(2) $\lim_{x\to a} c f(x)=c\alpha \quad (c\in\mathbb{R}$

(4) $\beta\neq 0$, $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{a}{\beta}$

(3) $\lim_{x\to a} f(x)g(x)=\alpha\beta$

定理 $a\in\mathbb{R}$

$f(x)\leq g(x)$, $\forall x\in\{x \mid 0<|x-a|<\delta\}$

for and $\delta>0$

$\Rightarrow \lim_{x\to a} f(x)\leq \lim_{x\to a} g(x)$ (limが定義できれば)

定理

$f:\{x : 0<|x-a|<r\}\to\mathbb{R}$

(a) $\lim_{x\to a} f(x)=\alpha \Rightarrow \{a_n\}\subset\mathbb{R}\ \ a_n\neq a\ (\forall n\in\mathbb{N})$

$a_n\to a\ (n\to\infty)$

$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} f(a_n)=\alpha$

(b) $\forall\{a_n\}\subset\mathbb{R},\ a_n\neq 0\ (\forall n\in\mathbb{N})$

$a_n\to a\ (n\to\infty)$

and $\lim_{n\to\infty} f(a_n)=\alpha$

$\Rightarrow \lim_{x\to a} f(x)=\alpha$

§片側からの極限

定義

$\lim_{x\to a+0} f(x)=\alpha$ $\left(\lim_{x\to a-0} f(x)=\alpha\right)$

$\Leftrightarrow \forall\varepsilon>0\ \exists\delta=\delta(\varepsilon)>0$

s.t. $a<x<a+\delta$

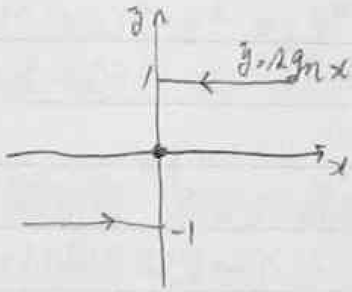
$(a-\delta<x<a)$

$\Rightarrow |f(x)-\alpha|<\varepsilon$

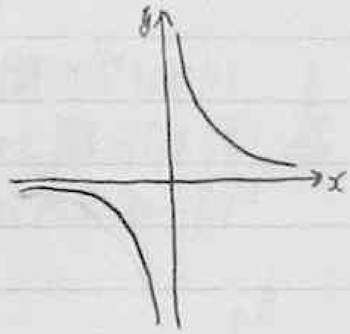
$a=0$ のとき

$\lim_{x\to\pm 0} f(x)=\alpha$

例 $\lim_{x\to 0+} \mathrm{sgn}\,x=+1$ $\lim_{x\to 0-}\mathrm{sgn}\,x=-1$



$\lim_{x\to 0+}\frac{1}{x}=+\infty$, $\lim_{x\to 0-}\frac{1}{x}=-\infty$



§ 連続関数

定義 関数$f(x)$が点aで連続

(f is continuous at a)

$\overset{def}{\Longleftrightarrow}$ 関数$f(x)$が点aの近傍$(a-\delta, a+\delta)$ $(\delta>0)$ で定義されていて、$\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$

$\left(\lim_{x\to a+} f(x) = \lim_{x\to a-} f(x)\right)$

もう少し正確に書くと

$f(a-\delta^*, a-\delta^*) \longrightarrow \mathbb{R}$ $(\delta^*>0)$ であって

$\forall \varepsilon>0,\ \exists \delta=\delta(\varepsilon, a)>0,\ \text{s.t. } |x-a|<\delta$

$(\delta<\delta^*)$ $\Rightarrow |f(x)-f(a)|<\varepsilon$

定義 $I\subset\mathbb{R}$: 開区間

$f: I\to\mathbb{R}$ が連続 (f is continuous in I)

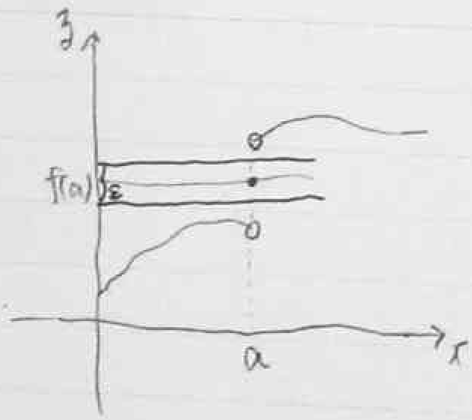
$\overset{def}{\Longleftrightarrow}$ $f: I\to\mathbb{R}$ が $\forall x\in I$ で連続

(f is continuous at any $x\in I$)

f I: (片側)閉区間で連続

$\overset{def}{\Longleftrightarrow}$ $\exists \tilde{I}$: 開区間 s.t. $I\subset\tilde{I}$

$\exists \tilde{f}: \tilde{I}\to\mathbb{R}$ 連続 $|$ $f(x)=\tilde{f}(x),\ x\in I$



$y = \sin\frac{1}{x}$

"$f[a,b]\to\mathbb{R}$ 連続"
$a<b$

定理 (中間値の定理)

関数$f(x)$は閉区間$[a,b]$で連続とする

$f(a)=\alpha$ と $f(b)=\beta$ は異なっている。このとき

$\min(\alpha,\beta) < \gamma < \max(\alpha,\beta)$

となる任意のγに対して

$f(c)=\gamma$ となる $c\in(a,b)$ が存在する。

証明 $\alpha<\beta$ とする

$A = \{x\in[a,b) \mid f(x)<\gamma\}$

とする。$\alpha\in A$ だから $A\neq\phi$

$c=\sup A$ とおく。$f(c)=\gamma$ をいう。

$\forall\varepsilon>0,\ \exists d_\varepsilon\in(c-\varepsilon, c)$ s.t. $f(d_\varepsilon)<\gamma$

$\Rightarrow \lim_{\varepsilon\to 0} f(d_\varepsilon) \leqq \gamma$

$\Rightarrow \lim_{x\to c-} f(x) \leqq \gamma$

$f(c)<\gamma$ とすると、$c\in A$

fは点cで連続

$\forall\varepsilon>0,\ \exists d=d(\varepsilon)>0$ s.t. $|x-c|<\delta$

$\Rightarrow |f(x)-f(c)|<\varepsilon$

$\varepsilon=\gamma-f(c)>0$ ととると

$f(x) < \varepsilon+f(c) = \gamma$

No.
Date

$\Rightarrow x \in A$

$\Rightarrow [c, c+\delta) \subset A$

これは

$c = \sup A$

に矛盾する

$f(c) = \gamma$

定義（最大値の定理）

閉区間 I で連続な関数 $f(x)$ は最大値, 最小値をとる。（f は有界）

証明 $I = [a, b]$

$J = \{ f(x) \mid x \in [a, b] \}$ 値域 とおく

$M = \sup J$ とする。

Mの定義より

$\forall n \in \mathbb{N}, \exists a_n \in [a, b]$ s.t.

$M - \frac{1}{n} < f(a_n) \leqq M$

$a < b_n = \sup_{k \geq n} a_k = \sup \{a_n, a_{n+1}, \cdots\} \leqq b$

単調減少, 有界

$\Rightarrow \lim_{n \to \infty} b_n = \limsup_{n \to \infty} a_n = c_1$

$\forall k \in \mathbb{N}\ \exists n_k \in \mathbb{N}$ s.t. $n_k \geq n$ かつ

$b_n - \frac{1}{k} < a_{n_k} \leqq b_n$

$\tilde{a}_n = a_{n_n}$ とすると

$$\boxed{\begin{cases} M - \frac{1}{n_n} < f(\tilde{a}_n) \leqq M \\ b_n - \frac{1}{n} < \tilde{a}_n < b_n \end{cases} \quad \forall n \in \mathbb{N}}$$

$\tilde{a}_n \to c_1$

$n \to \infty$

M $\lim_{n \to \infty} f(\tilde{a}_n) = f(c_1)$

$M \leqq \lim_{n \to \infty} f(\tilde{a}_n) \leqq M$

$\lim_{n \to \infty} f(\tilde{a}_n) = f(c_1) = M$

よって $M < +\infty$ で

$f(x)$ は上に有界で

$f(c_1) = \sup_{x \in [a, b]} f(x) = \max_{x \in [a, b]} f(x) = M$

No.

Date

定理

$f(x), g(x)$ が点 a で連続

$\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow$

(1) $\alpha f(x) + \beta g(x)$ は点 a で連続

(2) $f(x) g(x)$ は点 a で連続

(3) $g(a) \neq 0$ ならば $\frac{f(x)}{g(x)}$ は点 a で連続

注

写像(関数)

$x \longmapsto \alpha f(x) + \beta g(x)$

が点 a で連続

この写像を $\alpha f + \beta g$ と書くと

$(\alpha f + \beta g)(x)$ が点 a で連続

同様に

$fg : x \longmapsto f(x) g(x)$ と書くと

$(fg)(x)$ が点 a で連続

$(\alpha f + \beta g)'(x) = (\alpha f' + \beta g')(x)$

$'$ は線型 (linear)

定義

$f(x)$ を(開)区間で定義された実関数とし, a をその区間に属する点とする。関数

$\frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ は $x = a$ を除いて, その区間内で定義されている。このとき, 極限

$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ が存在するならば,

f は a において微分可能であるといい,

この極限を $\underset{\in \mathbb{R}}{f'(x)}$ と表わし, $f(x)$ の a における微分係数という。

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \in \mathbb{R}$$

$x - a = h$ とおくと, $x \to a$ のとき $h \to 0$

だから

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

正確に表わすと

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0$ s.t. $|h| < \delta$

$$\Rightarrow \left| \frac{f(a+h) - f(a)}{h} - f'(a) \right| < \varepsilon$$

そこで

$r(a, h) = f(a+h) - f(a) - h f'(a)$

とおくと

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0$ s.t. $|h| < \delta$

$$\Rightarrow \left| \frac{r(a, h)}{h} \right| < \varepsilon$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{r(a, h)}{h} = 0$$

このとき $r(a, h)$ は h の1次より高次の無限小であるという。$\underset{\text{small order}}{o(h)}$

$f(a+h) = f(a) + hf'(a) + o(h)$
となるとき, f は a で微分可能。
$df = hf'(a)$

$f(x) = x$
$df = dx \quad df = f'(x)dx$

定理
$f(x)$ が a で微分可能
$\Rightarrow f(x)$ は a で連続

定義
関数 $f(x)$ が開区間 (a,b) の各点で微分可能なとき, $f(x)$ は開区間 (a,b) で微分可能という

写像 $\underset{\underset{(a,b)}{\uparrow}}{x} \longmapsto f'(x)$ を $f(x)$ の導関数
derivative of f

これを f' $\frac{df}{dx}$, y', $\frac{dy}{dx}$

$y=f(x)$ とかく。 $\frac{d}{dx}f(x)$

$\frac{d}{dx} : \overset{C^1((a,b))}{f} \longmapsto \overset{C((a,b))}{f'(x)}$ 微分演算子
作用素

$C^1((a,b)) = \{f : f$ は (a,b) で連続微分可能$\}$

$C((a,b)) = \{f : f$ は (a,b) で連続$\}$

f が連続微分可能 $\Rightarrow$ f は微分可能
f が連続

定理
f, g が微分可能 $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$
$\Rightarrow (\alpha f + \beta g)' = \alpha f' + \beta g'$
微分の線形性 $\longrightarrow$ $(fg)' = f'g + fg'$
$A(\alpha f + \beta g) = \alpha Af + \beta Ag$
$\frac{d}{dx}(\alpha f + \beta g) = \alpha \frac{d}{dx} f + \beta \frac{d}{dx} g$ 線形

定理
$f(x), g(x)$ は それぞれ開区間 I J で定義されていて, f の値域 $\{y=f(x),\ x\in I\} \subset J$ とする。このとき $f(x)$ が $a \in I$ で微分可能
$g(y)$ が $b = f(a) \in J$ で微分可能ならば,
合成関数 $g \circ f$ $x \longmapsto g(f(x))$ は $a \in I$ で微分可能で
$(g \circ f)'(x) = g'(f(a))f'(a)$
が成り立つ。

逆三角関数の微分
(1) $y = \arcsin x \Leftrightarrow x = \sin y$

$\frac{dy}{dx}$ を求める。 両辺を x で微分
$1 = \cos y \frac{dy}{dx}$

$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cos y}$

$\cos y = \pm\sqrt{1-x^2}$ $y = \mathrm{Arcsin}\, x$
主値

$\frac{dy}{dx} = \pm\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$\frac{d}{dx}\mathrm{Arcsin}\, x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

(2) $y = \arccos x \Leftrightarrow x = \cos y$

$1 = -\sin y \dfrac{dy}{dx}$

$\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{1}{\sin y} = \mp\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$y = \mathrm{Arc}\cos x$

$\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

(3) $y = \arctan x$

$\Leftrightarrow x = \tan y$

$1 = \sec^2 y \dfrac{dy}{dx} = (1+\tan^2 y)\dfrac{dy}{dx}$

$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{1+x^2}$

対数微分

$\dfrac{d}{dx}x^x = \dfrac{d}{dx}e^{\log x^x} = \dfrac{d}{dx}e^{x\log x}$

$= e^{x\log x}(1+\log x)$

$y = x^x \Leftrightarrow \log y = x\log x$

$\dfrac{1}{y}\dfrac{dy}{dx} = \log x + 1$

$\dfrac{dy}{dx} = y(\log x + 1)$

$= x^x(\log x + 1)$

平均値の定理

極大(点) 極小(点)

定義 $I \subset \mathbb{R}$ 区間

$c \in I$ とする

$f : I \to \mathbb{R}$

点 c において

$f(x) \leqq f(c) \quad \forall x \in I$

となるとき, cを区間 I における(最大値点)といい $f(c)$をfの最大値といい

$f(c) = \max_{x \in I} f(x)$

とかく。

$c = \mathrm{var\,max}_{x \in I} f(x)$

と書くこともある。

最小値点, 最小点も同様。

$c \in I$ において, cを含むある開区間 $I_0 \subset I$ がとれて

$f(x) \leqq f(c) \quad \forall x \in I_0$

となるとき, $c \in I$ を極大点といい, $f(c)$を極大値という.

極大値
極小値 } ⇒ 極値 critical value

極大点
極小点 } ⇒ 極値点 critical point

定理

$I \subset \mathbb{R}$ 開区間
$f : I \to \mathbb{R}$ とする。
$c \in I$ は f の極値点である。
f は c で微分可能
$\Rightarrow f'(c) = 0$

証明

$c \in I$ で f が極大になっているとする.
$\forall h \in \mathbb{R}$ $c+h \in I$ とすると

$$f(c+h) \leqq f(c)$$

$h > 0$ のとき

$$\frac{f(c+h)-f(c)}{h} \leqq 0$$

$h < 0$ のとき

$$\frac{f(c+h)-f(c)}{h} \geqq 0$$

よって

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{f(c+h)-f(c)}{h} \leqq 0$$

$$\lim_{h \to 0^-} \frac{f(c+h)-f(c)}{h} \geqq 0$$

f は c で微分可能

$$f'(c) = \lim_{h \to 0} \frac{f(c+h)-f(c)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0\pm} \frac{f(c+h)-f(c)}{h}$$

だから $f'(c) \leqq 0$
$f'(c) \geqq 0$ $\therefore f'(c) = 0$

ロルの定理

関数 $f(x)$ は閉区間 $[a, b]$ で連続，開区間 (a, b) で微分可能，さらに

$$f(a) = f(b)$$

とすると，

$$f'(c) = 0$$

となる $c \in (a, b)$ が存在する。

証明

$f(x) =$ 定数 ならば O.K
$f(x) \neq$ 定数 とすると
f は閉区間で連続 $\Rightarrow$ 閉区間で最大値,最小値をとる。$f(a)=f(b)$, $f(x) \neq$ 定数
$\Rightarrow f(x)$ は (a, b) で最大値または最小値をとる。
最大値点あるいは最小値点を c と置くと
前の定理によって,

$$f'(c) = 0 \quad //$$