第１章　数と数列

記号、用語の確認

開区間・・・(a,b)、]a,b[　＝｛x｜a＜x＜b｝

閉区間・・・　[a,b]　　＝｛x｜a≦x≦b｝

有界性・・・

全てのｎに対して a_n ≦ｂとなるｂが存在　＜＝＞　a_n は<u>上に有界</u>、ｂを<u>上界</u>。

：　　　　a_n ≧ｂとなるｂが存在　＜＝＞　a_n は<u>下に有界</u>、ｂを<u>下界</u>。

ここで、**有界な単調増加 or 減少数列は収束する。**

差分方程式

この章はこれがメインです。・・・が、この参考書ではそんな扱ってないんで数学演習でやった問題を１問だけ・・・

$a_n=\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ は収束することを示す。ｐ２１

$$a_n=1+n\frac{1}{n}+\frac{n(n-1)}{2!}\frac{1}{n^2}+\cdots\cdots\cdots+{}_nC_r\frac{1}{n^r}+\cdots\cdots\cdots+{}_nC_n\frac{1}{n^n}$$

ここで、${}_nC_r\dfrac{1}{n^r}=\dfrac{n(n-1)(n-2)\cdots\cdots(n-r+1)}{r!}\dfrac{1}{n^r}=\dfrac{1}{r!}\left(1-\dfrac{1}{n}\right)\left(1-\dfrac{2}{n}\right)\cdots\cdots\left(1-\dfrac{r-1}{n}\right)$

と、分母分子を n^r でわる。

示すべきことは、

１、単調増加であること

２、上に有界であること　　　　である。

ｎが十分大きいとき、${}_nC_r\dfrac{1}{n^r}<\dfrac{1}{r!}=\dfrac{1}{1\cdot2\cdots\cdots r}<\dfrac{1}{2^{r-1}}$、また a_{n+1} のときと比べて a_n より大きいことは明らかだから、

$$a_n<1+1+\frac{1}{2^1}+\frac{1}{2^2}+\cdots\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}=1+\frac{1-\dfrac{1}{2^n}}{1-\dfrac{1}{2}}<3$$

よって示された。

第２章　関数

○単調性

ある区間で $x_1<x_2$ を満たすどんな x_1、x_2 に対しても常に $f(x_1)<f(x_2)$ が成り立つき、関数 $y=f(x)$ はその区間において強い意味で単調増加であると呼ぶ。また $f(x_1)\le f(x_2)$ が成り立つとき、単に単調増加と呼ぶ。同様に、$f(x_1)>f(x_2)$ のとき、関数 $y=f(x)$ はその区間において強い意味で単調減少、$f(x_1)\ge f(x_2)$ のときは単に単調減

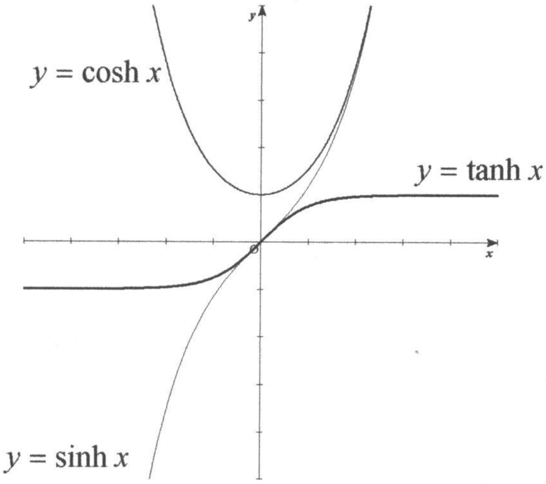
少と呼ぶ。

○さまざまな関数

$\boxed{\text{オイラーの公式}\quad e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta}$

これにより、複素数$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$は$z = re^{i\theta}$で表せる。

・双曲線関数



$$y = \sinh x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$$

$$y = \cosh x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$$

$$y = \tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

$\sec hx = \dfrac{1}{\cosh x}$　$\cos echx = \dfrac{1}{\sinh x}$　$\coth x = \dfrac{1}{\tanh x}$

$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$　$\tanh^2 x + \sec h^2 x = 1$

・三角関数

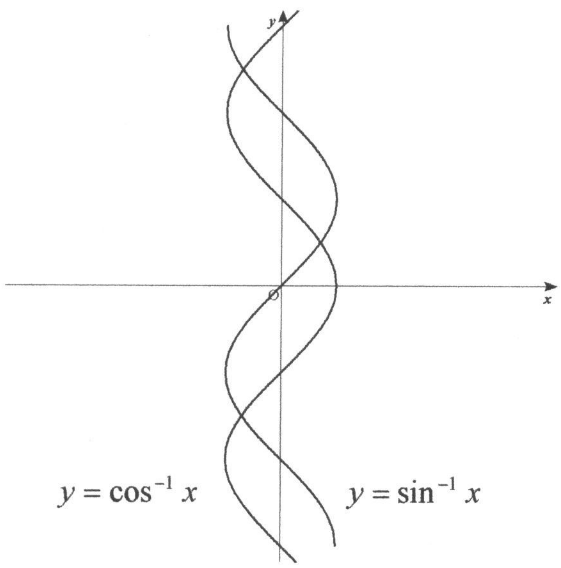
$\sec x = \dfrac{1}{\cos x}$　$\cos ecx = \dfrac{1}{\sin x}$　$\cot x = \dfrac{1}{\tan x}$

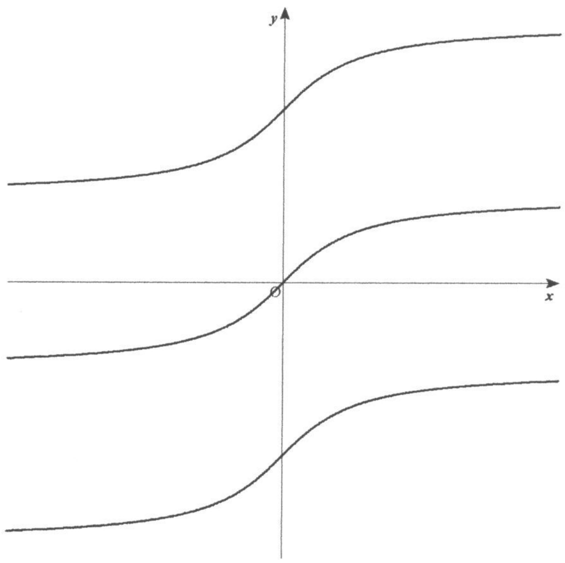
・逆三角関数…三角関数の逆関数

$y = \sin x$の逆関数は、$y = \sin^{-1} x$　または　$y = \arcsin x$　と表す。

同様に、$y = \cos x$の逆関数は、$y = \cos^{-1} x$　または　$y = \arccos x$　と表す

$y = \tan x$の逆関数は、$y = \tan^{-1} x$　または　$y = \arctan x$　と表す





$$y = \tan^{-1} x$$

また、値域を制限することにより、１価関数とすることが出来る。このように制限した逆三角関数を　$y = Sin^{-1}x$　または　$y = Arc\sin x$　のように表す。

第３章　微分

・代表的な関数の微分（高校でやったものは省きました）

$$(\cot x)' = -\frac{1}{\sin^2 x} \qquad \text{ただし} \cot x = \frac{1}{\tan x}$$

$$(\sinh x)' = \cosh x$$

$$(\cosh x)' = \sinh x$$

$$(\tanh x)' = \frac{1}{\cosh^2 x}$$

$$(\coth x)' = -\frac{1}{\sinh^2 x}$$

$$(\sin^{-1} x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$(\cos^{-1} x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$(\tan^{-1} x)' = \frac{1}{1+x^2}$$

$$(\cot^{-1} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$$

$$(\sinh^{-1} x)' = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

ここでは、$\sin^{-1} x, \tan^{-1} x, \sinh^{-1} x$の微分の証明だけとさせていただきます。（その他の微分は、二項定理、和積の公式、商の微分などを用いれば求められます。）

[証明]　　・$y = \sin^{-1} x$とおくと$x = \sin y$と書け、

$$\frac{d\sin^{-1} x}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{\frac{d\sin y}{dy}} = \frac{1}{\cos y}$$

$y = \sin^{-1} x$の値域は$-\frac{\pi}{2} \le y \le \frac{\pi}{2}$であり、この範囲では$\cos y \ge 0$。

よって、

$$\cos y = \sqrt{1-\sin^2 y}$$

と書ける。したがって、

$$\frac{d\sin^{-1}x}{dx} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

・$y = \tan^{-1}x$ とおくと $x = \tan y$ と書け、

$$\frac{d\tan^{-1}x}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{\frac{d\tan y}{dy}} = \frac{1}{\frac{1}{\cos^2 y}} = \frac{1}{1+\tan^2 y} = \frac{1}{1+x^2}$$

・$y = \sinh^{-1}x$ とおくと $x = \sinh y$ と書け、

$$\frac{d\sinh^{-1}x}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{\frac{d\sinh y}{dy}} = \frac{1}{\cosh y} = \frac{1}{\sqrt{1+\sinh^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

(途中で $\cosh^2 y - \sinh^2 y = 1$ を利用)

[証明終わり]

積分のときに役に立つかもしれないので載せておきます。(a は定数とする。)

$$(\log|x+\sqrt{x^2+a}|)' = \frac{1}{\sqrt{x^2+a}}$$ この式は結構重要だと思います。

$$(\sin^{-1}\frac{x}{a})' = \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}} \qquad (\frac{1}{a}\tan^{-1}\frac{x}{a})' = \frac{1}{a^2+x^2}$$

連続微分可能

関数 $f(x)$ が n 回微分可能であり、さらに $f^{(n)}(x)$ が連続であるような関数をまとめて C^n 級に属しているという。

(例) $y = x^2 \quad (x \geq 0), \quad -x^2 \quad (x<0)$

このとき $y' = 2x \quad (x \geq 0), \quad -2x \quad (x<0)$

$y'' = 2 \quad (x>0), \quad -2 \quad (x<0)$ $x=0$ では定義されない。

よって、この関数は C^1 級に属する。(二階導関数が $x=0$ で定義されないため、C^2 級には属さない。)

C^∞ 級に属する関数の例としては、$e^x, \sin x$ などが挙げられる。

ライプニッツの公式

$$\frac{d^n}{dx^n}\{f(x)g(x)\} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} f^{(k)}(x)\,g^{(n-k)}(x) \qquad \text{ただし} \binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}$$

微分の応用

ロルの定理

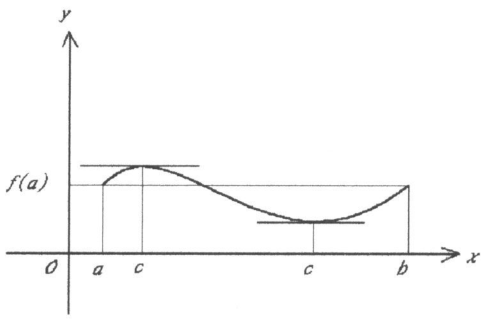
関数$f(x)$は$[a,b]$で連続、(a,b)で微分可能で、

$$f(a)=f(b)$$

ならば、

$$f'(c)=0 \qquad (a<c<b)$$

を満たすcが存在する。



平均値の定理

関数$f(x)$が$[a,b]$で連続、(a,b)で微分可能ならば、

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c) \qquad (a<c<b)$$

を満たすcが存在する。

・平均値の定理の拡張

平均値の定理は、aとbの役割を取り替えることによって、$a>b$のときも成り立つことが言え、次の形で書くことができる。

$$f(b)=f(a)+(b-a)f'(c) \quad (a<c<b, a>c>b)$$

ここで、$\theta=\dfrac{c-a}{b-a}$とおけば、aとbの大小関係に関わらず、

$$0<\theta<1$$

であって、平均値の定理は、

$$f(b) = f(a)+(b-a)f'(a+\theta(b-a)) \quad (0<\theta<1)$$

と書ける。さらに、$b=a+h$とおけば、

$$f(a+h)=f(a)+f'(a+\theta h)h \quad (0<\theta<1)$$

と書くことができる。aとbのどちらが大きくてもよかったことから、hは正でも負でもどちらでもよい。

コーシーの平均値の定理

$f(x), g(x)$が$[a,b]$で連続、(a,b)で微分可能で、$f'(x)\neq 0$ならば、

$$\frac{g(b)-g(a)}{f(b)-f(a)}=\frac{g'(c)}{f'(c)} \qquad (a<c<b)$$

を満たすcが存在する。

ロピタルの定理

1. $f(x), g(x)$は、aを含む区間で連続、高々aを除いて微分可能で、$f'(x)\neq 0$であって、

$$f(a)=g(a)=0$$

ならば、有限な極限値：$\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{g'(x)}{f'(x)}$が存在する限り、

$$\lim_{x\to a}\frac{g(x)}{f(x)}=\lim_{x\to a}\frac{g'(x)}{f'(x)}$$

2. $f(x),g(x)$ は、十分大きいすべて x のについて微分可能で、 $f'(x)\neq 0$ であって、
$x\to\infty$ のとき　$f(x)\to 0, g(x)\to 0$

ならば、有限な極限値： $\lim_{x\to a}\frac{g'(x)}{f'(x)}$ が存在する限り、

$$\lim_{x\to\infty}\frac{g(x)}{f(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{g'(x)}{f'(x)}$$

3. $f(x),g(x)$ は、a を含む区間で、a を除いて微分可能で、 $f'(x)\neq 0$ であって、
$x\to a$ のとき　$f(x)\to\infty, g(x)\to\infty$

ならば、有限な極限値： $\lim_{x\to a}\frac{g'(x)}{f'(x)}$ が存在する限り、

$$\lim_{x\to a}\frac{g(x)}{f(x)}=\lim_{x\to a}\frac{g'(x)}{f'(x)}$$

4. $f(x),g(x)$ は、十分大きいすべて x のについて微分可能で、 $f'(x)\neq 0$ であって、
$x\to\infty$ のとき　$f(x)\to\infty, g(x)\to\infty$

ならば、有限な極限値： $\lim_{x\to a}\frac{g'(x)}{f'(x)}$ が存在する限り、

$$\lim_{x\to\infty}\frac{g(x)}{f(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{g'(x)}{f'(x)}$$

・ロピタルの定理の応用

(例)不定形の極限値

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin^{-1}x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{(\sin^{-1}x)'}{(x)'}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}{1}=1$$

$$\lim_{x\to 0}x\log|x|=\lim_{x\to 0}\frac{\log|x|}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 0}\frac{(\log|x|)'}{(\frac{1}{x})'}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to 0}(-x)=0$$

テイラー展開

○代表的なテイラー展開

・ $e^x=1+x+\frac{1}{2!}x^2+\cdots+\frac{1}{n!}x^n+R_{n+1}(x)$

$$R_{n+1}(x)=\frac{1}{(n+1)!}e^{\theta x}x^{n+1}$$

・ $\cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \cdots + \frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n} + R_{2n+2}(x)$

$$R_{(n+1)}(x) = \frac{(-1)^{n+1}}{(2n+2)!}\cos(\theta x)x^{2n+2}$$

・ $\sin x = 1 - \frac{1}{3!}x^3 + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!}x^{2n-1} + R_{2n+1}(x)$

$$R_{(n+1)}(x) = \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\sin(\theta x)x^{2n+1}$$

・ $\log(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n + R_{(n+1)}(x)$

$$R_{(n+1)}(x) = \frac{(-1)^n}{n+1}\frac{1}{(1+\theta x)^{n+1}}x^{n+1}$$

・ランダウの記号

あるxの関数$f(x)$について、

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^n} = 0$$

となるとき、$f(x) = o(x^n)$と表す。

また、$x \to 0$として、

$$0 < \left|\frac{f(x)}{x^n}\right| < M \qquad (M\text{はxによらない定数})$$

となるとき、$f(x) = \mathrm{O}(x^n)$と表す。

テイラー展開

マクローリン展開では$x=0$のまわりで展開したが、$x=a$のまわりで展開したものが、テイラー展開である。マクローリン展開において、0の代わりにaを、xの代わりに$x-a$とすればよい。

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + R_{(n+1)}(x)$$

ただし $R_{n+1}(x) = \frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(a+\theta(x-a))(x-a)^{n+1} \qquad (0<\theta<1)$

(例)　不定形の極限値

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{x^2 - \sin^2 x}{x^2 \sin^2 x} \quad \cdots A$$

ここで、

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \mathrm{O}(x^5) = x\left\{1 - \frac{x^2}{3!} + \mathrm{O}(x^4)\right\}$$

より、

$$\sin^2 x = x^2\left\{1-\frac{2x^2}{3!}+\mathrm{O}(x^4)\right\}$$

であるから、

$$A=\lim_{x\to 0}\frac{x^2-x^2+\dfrac{2x^4}{3!}+\mathrm{O}(x^6)}{x^2\cdot x^2\left\{1-\dfrac{2x^2}{3!}+\mathrm{O}(x^4)\right\}}=\frac{1}{3}$$

・オイラーの公式

$$e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$$

$e^{i\theta}$をマクローリン級数によって展開し、実部と虚部に分ければ、実部が$\cos\theta$のマクローリン級数で、虚部が$\sin\theta$のマクローリン級数となっていることから、この式が成立することが分かる。

３－５　微分方程式

微分方程式の解法

物理学(力学)の授業でやった方法と同じなので省略させていただきます。

第４章　積分

授業でふれたが、教科書に載っていない部分

○ｋ階の差分方程式　$x_{n+k}+c_1x_{n+k-1}+c_2x_{n+k-2}+\cdots+c_kx_n=0$

ここで、λ を$\lambda^k+c_1\lambda^{k-1}+c_2\lambda^{k-2}+\cdots+c_k=0$ の解と定めると、

$x_n=\sum_{i=1}^{k}a_i\lambda_i^n$ となる。(ただし、a_iは任意の定数)

2004年度　数学IB前期期末試験問題

理科1類1〜3,21〜24組9月1日(水) 2限 10:50-12:20 (90分) 斉藤　毅

- 問題用紙　1枚、解答用紙　両面2枚、計算用紙1枚
- 筆記用具、計時機能のみの時計　以外もちこめません。
- 途中の計算などもできる限りくわしく書いて下さい。

第1問　逆3角関数

$$\arcsin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n)}\frac{1}{2n+1}x^{2n+1}$$

について，次の問いに答えよ.
(1)$\arcsin\frac{1}{2}$ を求めよ.
(2) 不等式

$$\left|\arcsin\frac{1}{2} - \sum_{n=0}^{9} \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n)}\frac{1}{2n+1}\frac{1}{x^{2n+1}}\right| \leq \frac{1}{10^8}$$

を示せ.

第2問　極限

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{n}{n^2+k^2}$$

を求めよ.

第3問　$f(x) = \frac{x}{e^x-1}$ とおく.

$$\lim_{n\to 0}\frac{f(x)-g(x)}{x^4} = 0$$

をみたす4次多項式 $g(x)$ をもとめよ.

第4問　a を実数とし，$f(x)>0$，$g(x)>0$ を $x\geq a$ で定義された連続関数とする．$x>a$ で関数 $\frac{f(x)}{g(x)}$ が単調減少であるとする．$x>a$ に対し，$F(x)=\int_a^x f(t)dt$，$G(x)=\int_a^x g(t)dt$ とおく.
$x>a$ に対し，$\frac{F(x)}{G(x)} > \frac{f(x)}{g(x)}$ であることを示せ.

2004年度夏学期 **数学IB試験問題** 担当：宮岡洋一教官

解答時間 90 分・解答用紙？枚・持込可否不明

1. 以下の数列 $(s_n)_{n\in\mathbf{N}}$ に極限があるかどうか判定せよ。

   a) $s_n = \sqrt[n]{(n+1)^3}$

   b) $s_n = \dfrac{n+1}{e^n}$

   c) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{\sqrt{k}}{k+1}$

   d) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{1}{\sqrt{k+1}}$

2. 以下の関数の $x=0$ における Taylor 展開を求めよ。一般項が計算できなければ、x^6 の係数まで求めよ。

   a) $\log(1+x^2)$

   b) $\arctan x$

   c) $\sqrt{1+\sin x}$

3. 以下の積分を求めよ。

   a) $\displaystyle\int_0^s \frac{dx}{1-x^3},\quad -1<s<1$

   b) $\displaystyle\int_0^\pi \frac{dx}{2-\cos x}$

   c) $\displaystyle\int_0^s \sqrt{x^3(1-x)}\,dx,\quad 0<s<1$

4. 以下の問に答えよ。

   a) $\displaystyle\int_0^\infty xe^{-nx}dx = \lim_{a>0,a\to 0,b\to\infty} \int_a^b xe^{-nx}dx$ を求めよ $(n=1,2,3\cdots)$。

   b) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x}{e^x-1}dx$ を $\zeta(s)=\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}$ を用いて表せ。