過去問ではトートロジーの判定、与えられた式の証明、述語論理記号を使って日本語の文を式で表す、付値関数を用いての証明などが出題されていました。

1 命題論理

1.1 命題論理を記述するのに使う記号

・命題記号 :「~は~である」などの命題を表す文字　P,Q,R など
・論理結合子:

¬　否定
∧　連言(かつ)
∨　選言(または)
→　条件法(もし~ならば~)
↔　双条件法:同値を表す
⊥　矛盾

1.2 式の定義

命題記号、それから命題記号と論理結合子をくっつけたもの、さらに⊥自体が命題である。

1.3 命題論理の意味論

1.3.1 真理表

・真理値:ある命題が真であれば、その命題の真理値はT、偽であれば真理値は F
・原子命題:それ以上分解できない命題。つまり命題記号だけでできていて、 論理結合子が含まれていない命題
・真理表:ある命題の原子命題たちの真理値のすべてのパターンにたいして、そのときのその命題の真偽を調べる表

1.3.2 否定、連言、選言、条件法、双条件法の真理表

P	Q	¬P	P∧Q	P∨Q	P→Q	P↔Q
T	T	F	T	T	T	T
T	F		F	T	F	F
F	T	T	F	T	T	F
F	F		F	F	T	T

1.3.3 トートロジー(恒真式)

真理表のすべての行でTをとる式のこと。

1.3.4 意味論的帰結

1.4 命題論理の証明論

以下の9つの法則を使って与えられた式を証明する

1. ∧-I　(かつの導入則)
AとBが成り立っているときA∧Bが導ける

2. ∧-E　(かつの除去則)

A∧Bが成り立っているときAが導ける(Bも導ける)

3. ∨-Ｉ　(またはの導入則)

Aが成り立っているときA∨Bが成り立つ(Bはどんな命題でもよく偽であってもかまわない)

4. ∨-E　(またはの除去則)

A∨Bが成り立っているとき、このときAが成り立っていると仮定してみてCがみちびかれ、Bが成り立っていると仮定してみてもCが成り立っているなら、結論としてCが成り立つ

5. →-I　(ならばの導入則)

Aが成り立っている、と仮定してみたとき、その条件の下でBが導かれるならば、このとき、A→が成り立つ

6. →-E　(ならばの除去則)

Aが成り立っているとき、A→Bが成り立っていればBが導ける

7.　¬-I　(否定の導入則)

Aと仮定してみると矛盾が生じる、すなわち矛盾記号⊥が導かれるならば、このとき¬Aが成り立つ

8.　¬-E　(否定の除去則)

Aと¬Aが同時に成り立ってたら、矛盾である、すなわち⊥が導ける。

9.　二重否定除去

¬¬Aがあれば、Aとしてよい

例題　$P \vee Q, \neg P \vdash Q$ を証明しなさい（教科書 P.77）

解

1	(1)	$P \vee Q$	Ass.
2	(2)	$\neg P$	Ass.
3	(3)	Q	H
2,3	(4)	$Q \wedge \neg P$	2,3. ∧-I
2,3	(5)	Q	4. ∧-E
6	(6)	$\neg Q$	H
7	(7)	P	H
6,7	(8)	$\neg Q \wedge P$	6,7. ∧-I
6,7	(9)	P	8. ∧-E
2,6,7	(10)	$\perp$	2,9. ¬-E
2,7	(11)	$\neg\neg Q$	6-10. ¬-I
2,7	(12)	Q	11. ¬¬-E
1,2	(13)	Q	1, 3-5, 7-12

※ Ass. = 前提（Assumption）
　H = 仮定（Hypothesis）

I、⊢ という記号は証明論的帰結を表す。つまり「$P \vee Q, \neg P \vdash Q$ を証明しろ」とは

「$P \vee Q, \neg P$ という前提の下に Q が導かれることを証明論的に証明せよ」という意味である。

II. 解き方のベースとなるのは (1) ～～～ となっている部分である。

III、右側には、前提・仮定、何番に示されたことを利用して導いたか、

どの規則を使用したか、を書く。11行目、13行目のように、途中で仮定してから

導かれた結論を利用する場合、「m－n」のような書き方をする。

IV、左側には、どの前提・仮定に依存しているかを書く。

自分の行が Ass. H の時は自分の番号を書く。

その他の行では、右側に書いた数字の行の依存している行を全て書く。
（10行目を参照）

Date . . No.

※ただし「仮定が落ちる」という現象がある。

仮定が落ちるとは…

→I, ∨-E, ¬-I を使用する時には仮定が必要だが, 11行目のようにその仮定には依存しなくなる。

また結論では前提のみに依存していなければならない。

◎いつどの法則を使えばいいのか…？

以下, 教科書の抜粋なので詳しく知りたい人は6章を参照。

I. 結論が「A→B」の場合

「A→Bを導くには, まずAを仮定し, その上でBを導く」

II、結論が「¬A」の場合

「¬Aを導くには, Aを仮定して, それと前提から矛盾つまり⊥を導く」

III、結論が「A∧B」の場合

「前提からAとBのそれぞれを証明する」

IV. 結論が「A∨B」の場合

「AかBのどちらかを導く」

V. 前提に「A∨B」が含まれる場合

「まず, A→C と B→C をそれぞれ導き, その上で ∨-E を使用する」

※ I～V で上手くゆかない場合には, 結論Aの否定 ¬Aを仮定し, ⊥を導く