記号論理学 I（木 1・金子）

し　け　ぷ　り　by はらけん←重要

目　次

注意

- **1. 講義内容**については，板書を中心に適宜コトバを補ってまとめてあります．ただし，教科書がとってもわかりやすく書かれているので，教科書に説明されている事柄は省きました．教科書をじっくり読んでみて下さい．コトバを補ったものの多少羅列的でわかりにくい面があるかもしれません．そこは許して下さい．6 月 23 日分までを扱ってあります．
- テストは証明中心です．**2. 講義中の問題と答え**では，講義で扱った全問題（例などを含む）について，問題文と解答を載せました．教科書の解答には，演習問題の解答と偶数番号の問題の解答が抜けているので，それらを全て **3. 教科書の問題の解答**に載せました．これで教科書中の全問題についての解答がそろいます．
- 解答は見直しましたが，ボクが執筆したのでまだ間違いがあるかもしれません．間違いを見つけた場合は，速やかにボクまでこっそり教えてください．すぐ訂正させてもらいます．また，証明は必ずしも best なやり方で執筆されているとは限りません．何かあったらボクまで言って下さい．

試験は **7/21（木）1 限**です !!!

S1-17 原 健太朗

活字化担当者（北川）による注：このシケプリは本来は手書き，47 ページというすごい大作で，そのまま画像で取り込んで公開しようか否か悩んでしまいました．容量という点では，打ち直したほうが有利なので，敢えて打ち直しておきました．

1 講 義 内 容

1.1 真 理 関 数

■ルールと用語

- 「真」を「T」,「偽」を「F」で表す.
- 「¬」という「否定する装置」で，T⟼F, F⟼T というように変換される.
- **トートロジー（恒真命題）**：真理表のすべての行で T となる式.
- **意味論的帰結**

$$\underbrace{\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n}_{\text{前提}} \models \underbrace{\psi}_{\text{結論}}$$

つまり，前提 $(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n)$ がすべて T となるどの行においても ϕ が T であるということ.

■真理表とそのルール

- **例**：ここでは行数節約のため横に書いているが，本来は縦 1 列に書く.

P	Q	R	$(\neg P \wedge Q) \Rightarrow R$		P	Q	R	$(\neg P \wedge Q) \Rightarrow R$	
T	T	T	F	T	T	T	F	F	T
T	F	T	F	T	T	F	F	F	T
F	T	T	T	T	F	T	F	T	F
F	F	T	F	T	F	F	F	F	T

1 列目〜3 列目は，前提 P, Q, R の T, F の組み合わせを全て書く．書く順番は,
  - P の行；T を 4 つ，F を 4 つ
  - Q の行；T を 2 つ，F を 2 つの repeat
  - R の行；T を 1 つ，F を 1 つの repeat

右では，∧, ⇒ の部分の T, F を記入する.

- **真理表のルールの基本**

φ	ψ	$\varphi \wedge \psi$	$\varphi \vee \psi$	$\varphi \Rightarrow \psi$	$\varphi \Leftrightarrow \psi$
T	T	T	T	T	T
T	F	F	T	F	F
F	T	F	T	T	F
F	F	F	F	T	T

$\varphi \Rightarrow \psi$ の式で，値が F になるのは「φ が T かつ ψ が F」の場合のみであること，および前件 φ が F ならば値は常に T となること，の 2 つはとっても重要！

■$\vDash$ の 性 質

- $(A \vDash B) \Leftrightarrow (\vDash A \Rightarrow B)$ が成り立つ，
- $\vDash \varphi$ は φ がトートロジーであることを示す．

■背理法について

- **流れ**（A を証明したい）
  ① $\neg A$ を仮定．
  ② 矛盾．
  ③ よって，A が証明された．
- **具体的な適用**（トートロジーを証明したい）
  ① φ がトートロジーでないと仮定[1]．
  ② 矛盾．
  ③ したがって，φ はトートロジー．

■双 条 件 法

$(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (\neg P \vee Q)$ が成り立つ．

1.2 メ タ 論 理

■用語と概念の定義

- **アリティ (arity)**：関数や述語のもつ変項の数のこと．
  （例）　x は犬である……arity 1
  　　　　x は y をねたむ……arity 2
- **ターム (term)**：タームとは以下の条件を満たす最小の集合のこと．
  ① 個体変項はタームである．
  ② 個体定項はタームである．
  ③ f が arity n の関数記号で，$a_1, \ldots, a_n$ がタームのとき $f\{a_1, \ldots, a_n\}$ はタームである．
- **一階の述語の記号**
  - 述語記号　$P_1, P_2, \ldots, F, G, R, \ldots$
  - 関数記号　$f_1, f_2, \ldots, g, h, \ldots$
  - 定項記号　$a, b, c, \ldots, a_1, a_2, \ldots$
  - 変数記号　$x, y, z, \ldots, x_1, x_2, \ldots$
  - 論理結合子　$\neg, \wedge, \vee, \ldots, \Rightarrow, \Leftrightarrow, \perp$
  - 量化子　$\forall, \exists$
  - 補助記号　(,)
- **原子式の**（教科書とは違った言い回しの）**定義**
  P が arity n の述語で，$t_1, \ldots, t_n$ がタームのとき，$P(t_1, \ldots t_n)$ は原子式である．

1.3 一階述語論理の意味論

■モデルとその周辺

- **モデル（構造）**：一階述語を解釈する枠組のこと．
- **ドメイン（domain，領域）**：変項や量化子の走るところ．
- **非論理記号の解釈の具体的方法**
  ① ドメインを決める（ただし空ではないとする）．
  ② ドメインの中から，個体定項が指示するものを決める．
  ③ 述語記号をドメインに基づいて解釈する．
    - **一項述語のとき**：ドメインの部分集合を割りあてる．
    - **二項述語のとき**：$D \times D$ の部分集合[2]を割りあてる．
  ④ 関数記号にはドメイン内の対象または対象列から，ドメインの対象への関数を割りあてる．

論理記号を解釈する関数を解釈関数という，ここでそれを I と表すと，モデル $= \langle D, I \rangle$ としてモデルを定めることができる．

■付 値 関 数

- **ルール**：「真」ならば付値が「1」，「偽」ならば付値が「0」．
- **言語 L の中での付値関数 V_{A}** $R(a_1, \ldots, a_n)$ が L の原子式のとき，$V_{\mathrm{A}}(R(a_1, \ldots, a_n)) = 1$ となる[3]のは，$\langle I(a_1), \ldots, I(a_n) \rangle \in I(R)$<u>のときであり，そのときに限る</u>[4]．
- **V_{A} の定義**
  ① $V_{\mathrm{A}}(\neg\varphi) = 1 \Leftrightarrow V_{\mathrm{A}}(\varphi) = 0$.
  ② $V_{\mathrm{A}}(\varphi \wedge \psi) = 1 \Leftrightarrow V_{\mathrm{A}}(\varphi) = V_{\mathrm{A}}(\psi) = 1$.
  ③ $V_{\mathrm{A}}(\varphi \vee \psi) = 0 \Leftrightarrow V_{\mathrm{A}}(\varphi) = V_{\mathrm{A}}(\psi) = 0$.

---

[1] つまり，φ はある行で F になると仮定している．

[2] $D \times D$ は，順序を考える必要がある，$\langle a, b \rangle$ のような形を順序対という．交換則が成り立たないことに注意．

[3] $V_{\mathrm{A}}(\varphi) = 1$ とは，モデル A における φ への付値が 1 であることを示す．

[4] この下線部は，必要十分を表す表現．

④ $V_{\mathrm{A}}(\varphi \Rightarrow \psi) = 1 \Leftrightarrow V_{\mathrm{A}}(\varphi) = 0$ または $V_{\mathrm{A}}(\psi) = 1$.

⑤ $V_{\mathrm{A}}(\forall x\, \varphi) = 1 \Leftrightarrow$ L のすべての定項 c について $V_{\mathrm{A}}(\varphi[c/x]) = 1$[5].

⑥ $V_{\mathrm{A}}(\exists x\, \varphi) = 1 \Leftrightarrow$ L のある定項 c について $V_{\mathrm{A}}(\varphi[c/x]) = 1$.

[5] $[c/x]$ は，x に c を代入することを示す.

2　講義中の問題と答え

2.1　真 理 関 数

◆真理表を作って下さい

① $(P \Rightarrow Q) \vee \neg P$

② $((P \vee Q \wedge \neg P) \Rightarrow Q$

①

P	Q	$(P \Rightarrow Q) \vee \neg P$		
T	T	T	**T**	F
T	F	F	**F**	F
F	T	T	**T**	T
F	F	T	**T**	T

②

P	Q	$((P \vee Q) \wedge \neg P) \Rightarrow Q$				
T	T	T	F	F	**T**	T
T	F	T	F	F	**T**	F
F	T	T	T	T	**T**	T
F	F	F	F	T	**T**	F

◆真理表を作って下さい

① $P \Rightarrow (Q \vee \neg P)$

② $(\neg P \wedge Q) \Rightarrow R$

③ $\neg(P \wedge Q) \Leftrightarrow (\neg P \vee \neg Q)$

①

P	Q	$Q \vee \neg P$		
T	T	T	**T**	F
T	F	F	**F**	F
F	T	T	**T**	T
F	F	F	**T**	T

②

P	Q	R	$(\neg P \wedge Q) \Rightarrow R$				
T	T	T	F	F	T	**T**	T
T	T	F	F	F	T	**T**	F
T	F	T	F	F	F	**T**	T
T	F	F	F	F	F	**T**	F
F	T	T	T	T	T	**T**	T
F	T	F	T	T	T	**F**	F
F	F	T	T	F	F	**T**	T
F	F	F	T	F	F	**T**	F

③

P	Q	$\neg(P \vee Q) \Leftrightarrow (\neg P \vee \neg Q)$					
T	T	F	T	**T**	F	F	F
T	F	T	F	**T**	F	T	T
F	T	T	F	**T**	T	T	F
F	F	T	F	**T**	T	T	T

◆真理表を作って下さい：$((P \Rightarrow Q) \land (Q \Rightarrow R)) \Rightarrow (P \Rightarrow R)$

P	Q	R	$((P \Rightarrow Q) \land (Q \Rightarrow R)) \Rightarrow (P \Rightarrow R)$				
T	T	T	T	T	T	**T**	T
T	T	F	T	F	F	**T**	F
T	F	T	F	F	T	**T**	T
T	F	F	F	F	T	**T**	F
F	T	T	T	T	T	**T**	T
F	T	F	T	F	F	**T**	T
F	F	T	T	T	T	**T**	T
F	F	F	T	T	T	**T**	T

◆トートロジーはどれですか？

① $(\neg P \lor Q) \Leftrightarrow (P \Rightarrow Q)$

② $P \Rightarrow ((Q \Rightarrow R) \Rightarrow ((P \Rightarrow Q) \Rightarrow (P \Rightarrow R)))$

③ $(P \Rightarrow (Q \Rightarrow R)) \Rightarrow ((P \land Q) \Rightarrow R)$

④ $P \land \neg P$　　⑤ $\perp \Leftrightarrow (P \land \neg P)$

①

P	Q	$(\neg P \lor Q) \Leftrightarrow (P \Rightarrow Q)$				
T	T	F	T	T	**T**	T
T	F	F	F	F	**T**	F
F	T	T	T	T	**T**	T
F	F	T	T	F	**T**	T

②

P	Q	R	$(Q \Rightarrow R) \Rightarrow ((P \Rightarrow Q) \Rightarrow (P \Rightarrow R))$				
T	T	T	T	**T**	T	T	T
T	T	F	F	**T**	T	F	F
T	F	T	T	**T**	F	T	T
T	F	F	T	**T**	F	T	F
F	T	T	T	**T**	T	T	T
F	T	F	F	**T**	T	T	T
F	F	T	T	**T**	T	T	T
F	F	F	T	**T**	T	T	T

③

P	Q	R	$(P \Rightarrow (Q \Rightarrow R)) \Rightarrow ((P \land Q) \Rightarrow R)$						
T	T	T	T	T	T	**T**	T	T	T
T	T	F	T	F	F	**T**	T	F	F
T	F	T	T	T	T	**T**	F	T	T
T	F	F	T	T	T	**T**	F	T	F
F	T	T	F	T	T	**T**	F	T	T
F	T	F	F	T	F	**T**	F	T	F
F	F	T	F	T	T	**T**	F	T	T
F	F	F	F	T	T	**T**	F	T	F

④

P	$P \land \neg P$		
T	T	**F**	F
F	F	**F**	T

⑤

P	$\perp \Leftrightarrow (P \land \neg P)$		
T	F	**T**	F
F	F	**T**	F

以上より，トートロジーは，①，②，③，⑤．

2.2 背　理　法

◆次を証明して下さい．

① $\models P \Rightarrow (Q \Rightarrow P)$　　② $\models (P \Rightarrow Q) \Rightarrow (\neg Q \Rightarrow \neg P)$

① $P \underset{a}{\Rightarrow} (Q \underset{b}{\Rightarrow} P)$ の真理表のある行で a の $\Rightarrow$ が F の値をとると仮定する．このとき，**P の値は T**，$(Q \Rightarrow P)$ の値は F となる．$(Q \Rightarrow P)$ の値が F となるので，Q の値は T，**P の値は F** である．（矛盾）

背理法により，a の $\Rightarrow$ は常に T の値をとる．すなわち，この命題はトートロジーとなり，$\models P \Rightarrow (Q \Rightarrow P)$．■

② $(P \underset{a}{\Rightarrow} Q) \underset{b}{\Rightarrow} (\neg Q \underset{c}{\Rightarrow} \neg P)$ の真理表のある行で $\underset{b}{\Rightarrow}$ が F の値をとると仮定する．このとき，**$(P \Rightarrow Q)$ の値は T**，$(\neg Q \Rightarrow \neg P)$ の値は F となる．$(\neg Q \Rightarrow \neg P)$ の値が F となるので，$\neg Q$ の値は T，$\neg P$ の値は F であり，すなわち，P の値は T，Q の値は F である．よって，**$(P \Rightarrow Q)$ の値は F** になる．（矛盾）

背理法により，b の $\Rightarrow$ は常に T の値をとる．すなわち，この命題はトートロジーであり，$\models (P \Rightarrow Q) \Rightarrow (\neg Q \Rightarrow \neg P)$．■

◆次を証明して下さい.（①・②はべき等律と言われる.）

① $(A\vee A)\Leftrightarrow A$　　② $\models(A\wedge A)\Leftrightarrow A$

③ $(A\vee B)\vee C\Leftrightarrow(A\vee(B\vee C))$
④ $(A\wedge B)\wedge C\Leftrightarrow(A\wedge(B\wedge C))$
} 結合律

⑤ $(A\vee B)\Leftrightarrow(B\vee A)$
⑥ $(A\wedge B)\Leftrightarrow(B\wedge A)$
} 交換律

⑦ $A\vee(B\wedge C)\Leftrightarrow(A\vee B)\wedge(A\vee C)$
⑧ $A\wedge(B\vee C)\Leftrightarrow(A\wedge B)\vee(A\wedge C)$
} 分配律

⑨ $\neg(A\vee B)\Leftrightarrow(\neg A\wedge\neg B)$
⑩ $\neg(A\wedge B)\Leftrightarrow(\neg A\vee\neg B)$
} ド・モルガンの法則

⑪ $\neg\neg A\Leftrightarrow A$ } 重否定律

---

①（値が全て T になることを示せばよい.）

A	$(A\vee A)\Leftrightarrow A$
T	T　**T** T
F	F　**T** F

② $(\Rightarrow)$

A	$(A\wedge A)\Rightarrow A$
T	T　**T** T
F	F　**T** F

$(\Leftarrow)$

A	$(A\wedge A)\Leftarrow A$
T	T　**T** T
F	F　**T** F

③

A	B	C	$(A\vee B)\vee C\Leftrightarrow(A\vee(B\vee C))$
T	T	T	T　T T **T** T T　T
T	T	F	T　T F **T** T T　T
T	F	T	T　T T **T** T T　T
T	F	F	T　T F **T** T T　F
F	T	T	T　T T **T** F T　T
F	T	F	T　T F **T** F T　T
F	F	T	F　T T **T** F T　T
F	F	F	F　F F **T** F F　F

④

A	B	C	$(A\wedge B)\wedge C\Leftrightarrow(A\wedge(B\wedge C))$
T	T	T	T　T T **T** T T　T
T	T	F	T　F F **T** T F　F
T	F	T	F　F T **T** T F　F
T	F	F	F　F F **T** T F　F
F	T	T	F　F T **T** F F　T
F	T	F	F　F F **T** F F　F
F	F	T	F　F T **T** F F　F
F	F	F	F　F F **T** F F　F

⑤

A	B	$(A\vee B)\Leftrightarrow(B\vee A)$
T	T	T　**T**　T
T	F	T　**T**　T
F	T	T　**T**　T
F	F	F　**T**　F

⑥

A	B	$(A\wedge B)\Leftrightarrow(B\wedge A)$
T	T	T　**T**　T
T	F	F　**T**　F
F	T	F　**T**　F
F	F	F　**T**　F

⑦

A	B	C	$A\vee(B\wedge C)\Leftrightarrow(A\vee B)\wedge(A\vee C)$
T	T	T	T T　T　**T**　T　T　T
T	T	F	T T　F　**T**　T　T　T
T	F	T	T T　F　**T**　T　T　T
T	F	F	T T　F　**T**　T　T　T
F	T	T	F T　T　**T**　T　T　T
F	T	F	F F　F　**T**　T　F　F
F	F	T	F F　F　**T**　F　F　T
F	F	F	F F　F　**T**　F　F　F

⑧

A	B	C	$A \wedge (B \vee C) \Leftrightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$					
T	T	T	T T	T	**T**	T	T	T
T	T	F	T T	T	**T**	T	T	F
T	F	T	T T	T	**T**	F	T	T
T	F	F	T F	F	**T**	F	F	F
F	T	T	F F	T	**T**	F	F	F
F	T	F	F F	T	**T**	F	F	F
F	F	T	F F	T	**T**	F	F	F
F	F	F	F F	F	**T**	F	F	F

⑨

A	B	$\neg(A \vee B) \Leftrightarrow (\neg A \wedge \neg B)$					
T	T	F	T	**T**	F	F	F
T	F	F	T	**T**	F	F	T
F	T	F	T	**T**	T	F	F
F	F	T	F	**T**	T	T	T

⑩

A	B	$\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow (\neg A \vee \neg B)$					
T	T	F	T	**T**	F	F	F
T	F	T	F	**T**	F	T	T
F	T	T	F	**T**	T	T	F
F	F	T	F	**T**	T	T	T

⑪

A	$\neg\neg A \Leftrightarrow A$		
T	TFT	**T**	T
F	FTF	**T**	F

2.3 命題論理の証明法

◆次を証明して下さい.

① $P,\ P \Rightarrow Q,\ P \Rightarrow R \vdash Q \wedge R$　　③ $P \Rightarrow Q,\ Q \Rightarrow R \vdash P \Rightarrow R$

② $P \Rightarrow (Q \wedge R),\ P,\ S \vdash R \wedge S$

①	1	([)	1	]
	PAss.			
	2	(2)	$P \Rightarrow Q$	Ass.
	3	(3)	$P \Rightarrow R$	Ass.
	1, 2	(4)	Q	1, 2. $\Rightarrow$-E
	1, 3	(5)	R	1, 3. $\Rightarrow$-E
	1, 2, 3	(6)	$Q \wedge R$	4, 5. $\wedge$-I
②	1	(2)	$P \Rightarrow (Q \wedge R)$	Ass.
	2	(2)	P	Ass.
	3	(3)	S	Ass.
	1, 2	(4)	$Q \wedge R$	1, 2. $\Rightarrow$-E
	1, 2	(5)	R	4. $\wedge$-E
	1, 2, 3	(6)	$R \wedge S$	3, 5. $\wedge$-I
③	1	(1)	$P \Rightarrow Q$	Ass.
	2	(2)	$Q \Rightarrow R$	Ass.
	3	(3)	P	H.
	1, 3	(4)	Q	1, 3. $\Rightarrow$-E
	1, 2, 3	(5)	R	2, 4. $\Rightarrow$-E
	1, 2	(6)	$P \Rightarrow R$	3–5. $\Rightarrow$-I

◆次を証明して下さい.

① $P \vdash (P \Rightarrow Q) \Rightarrow Q$　　② $P \Rightarrow (Q \Rightarrow R),\ Q \vdash P \Rightarrow R$

③ $P \Rightarrow S,\ Q \Rightarrow (S \Rightarrow R) \vdash P \Rightarrow (Q \Rightarrow R)$

①	1	(1)	P	Ass.
	2	(2)	$P \Rightarrow Q$	H.
	1, 2	(3)	Q	1, 2. $\Rightarrow$-E
	1	(4)	$(P \Rightarrow Q) \Rightarrow Q$	2–3. $\Rightarrow$-I
②	1	(1)	$P \Rightarrow (Q \Rightarrow R)$	Ass.
	2	(2)	Q	Ass.
	3	(3)	P	H.
	1, 3	(4)	$Q \Rightarrow R$	1, 3. $\Rightarrow$-E
	1, 2, 3	(5)	R	2, 4. $\Rightarrow$-E
	1, 2	(6)	$P \Rightarrow R$	3–5. $\Rightarrow$-I
③	1	(1)	$P \Rightarrow S$	Ass.
	2	(2)	$Q \Rightarrow (S \Rightarrow R)$	Ass.
	3	(3)	P	H.
	1, 3	(4)	S	1, 3. $\Rightarrow$-E
	5	(5)	Q	H.
	2, 5	(6)	$S \Rightarrow R$	2, 5. $\Rightarrow$-E
	1, 2, 3, 5	(7)	R	4, 6. $\Rightarrow$-E
	1, 2, 3	(8)	$Q \Rightarrow R$	5–7. $\Rightarrow$-I
	1, 2	(9)	$P \Rightarrow (Q \Rightarrow R)$	3–8. $\Rightarrow$-I

◆次を証明して下さい．

① $P \lor Q \vdash Q \lor P$　② $P \lor Q \vdash (P \lor R) \lor (Q \lor R)$

③ $P \Rightarrow R,\ Q \Rightarrow R,\ R \Rightarrow S \vdash (P \lor Q) \Rightarrow S$

①	1	(1)	$P \lor Q$	Ass.
	2	(2)	P	H.
	2	(3)	$Q \lor P$	2. $\lor$-I
	4	(4)	Q	H.
	4	(5)	$Q \lor P$	4. $\lor$-I
	1	(6)	$Q \lor P$	1, 2–3, 4–5. $\lor$-E
②	1	(1)	$P \lor Q$	Ass.
	2	(2)	P	H.
	2	(3)	$P \lor R$	2. $\lor$-I
	2	(4)	$(P \lor R) \lor (Q \lor R)$	3. $\lor$-I
	5	(5)	Q	H.
	5	(6)	$Q \lor R$	5. $\lor$-I
	5	(7)	$(P \lor R) \lor (Q \lor R)$	6. $\lor$-I
	1	(8)	$(P \lor R) \lor (Q \lor R)$	1, 2–4, 5–7. $\lor$-E
③	1	(1)	$P \Rightarrow R$	Ass.
	2	(2)	$Q \Rightarrow R$	Ass.
	3	(3)	$R \Rightarrow S$	Ass.
	4	(4)	$P \lor Q$	H.
	5	(5)	P	H.
	1, 5	(6)	R	1, 5. $\Rightarrow$-E
	1, 3, 5	(7)	S	3, 6. $\Rightarrow$-E
	8	(8)	Q	H.
	2, 8	(9)	R	2, 8. $\Rightarrow$-E
	2, 3, 8	(10)	S	3, 9. $\Rightarrow$-E
	1, 2, 3, 4	(11)	S	4, 5–7, 8-10. $\lor$-E
	1, 2, 3	(12)	$(P \lor Q) \Rightarrow S$	4–11. $\Rightarrow$-I

◆次を証明して下さい：$P \Rightarrow (Q \Rightarrow (R \lor S)),\ \neg(R \lor S) \vdash P \Rightarrow \neg Q$

1	(1)	$P \Rightarrow (Q \Rightarrow (R \lor S))$	Ass.
2	(2)	$\neg(R \lor S)$	Ass.
3	(3)	P	H.
1, 3	(4)	$Q \Rightarrow (R \lor S)$	1, 3. $\Rightarrow$-E
5	(5)	Q	H.
1, 3, 5	(6)	$R \lor S$	4, 5. $\Rightarrow$-E
1, 2, 3, 5	(7)	$\perp$	2, 6. $\neg$-E
1, 2, 3	(8)	$\neg Q$	5–7. $\neg$-I
1, 2	(9)	$P \Rightarrow \neg Q$	3–8. $\Rightarrow$-I

◆次を証明して下さい．

① $\vdash P \lor \neg P$　③ $B \vdash A \Rightarrow B$

② $P \Rightarrow P$

①	1	(1)	$\neg(P \lor \neg P)$	H.
	2	(2)	P	H.
	2	(3)	$P \lor \neg P$	2. $\lor$-I
	1, 2	(4)	$\perp$	1, 3. $\neg$-E
	1	(5)	$\neg P$	2–4. $\neg$-I
	1	(6)	$P \lor \neg P$	5. $\lor$-I
	1	(7)	$\perp$	1, 6. $\neg$-E
		(8)	$\neg\neg(P \lor \neg P)$	1–7. $\neg$-I
		(9)	$P \lor \neg P$	8. DN-
②	1	(1)	P	Ass.
	1	(2)	$P \Rightarrow P$	1. $\Rightarrow$-I
③	1	(1)	B	Ass.
	1	(2)	$A \Rightarrow B$	1. $\Rightarrow$-I

◆次の文を式で表して下さい．

$$\left.\begin{array}{ll} x\text{ は人間である} & : Hx \\ x\text{ は動物である} & : Ax \\ x\text{ は学生である} & : Sx \\ x\text{ は貧しい} & : Px \\ x\text{ はリンゴである} & : Rx \end{array}\right\}\text{とする．}$$

① すべての人間は動物である．

② ある人間は学生である．

③ あるものは学生である．

④ ちょうど 1 人の学生がいる．

⑤ 貧しい学生が存在する．

⑥ 2 個のリンゴがある．

① $\forall x(Hx \Rightarrow Ax)$

② $\exists x(Hx \wedge Sx)$

③ $\exists x\, Sx$

④ $\exists x(Sx \wedge \forall y(Sy \Rightarrow x = y))$

⑤ $\exists x(Px \wedge Sx)$

⑥ $\exists x \exists y(Rx \wedge Ry \wedge x \neq y \wedge \forall z(Rz \Rightarrow (z = x \vee z = y)))$

◆次の文を式で表して下さい．

$$\left.\begin{array}{ll} \text{ボブ} & : b \\ \text{ルーシー} & : c \\ x\text{ は機械工である} & : Mx \\ x\text{ は看護士である} & : Nx \\ x\text{ は指輪である} & : Rx \\ x\text{ は } y\text{ を愛している} & : Lxy \\ x\text{ は } y\text{ より背が高い} & : Txy \\ x\text{ は } y\text{ に } z\text{ をあげる} & : Gxyz \end{array}\right\}\text{とする．}$$

① ルーシーは機械工である．

② ボブは機械工である．

③ ルーシーとボブは機械工である．

④ ルーシーまたはボブは機械工である．

⑤ ボブは機械工または看護士である．

⑥ ルーシーはボブより背が高い．

⑦ ボブはルーシーを愛している．

⑧ ボブは自分自身を愛している．

⑨ ボブはすべてのものを愛している．

⑩ すべてのものがボブを愛している．

⑪ すべてのものが自分自身を愛している．

⑫ あるものは自分自身を愛している．

⑬ ルーシーが愛していないものがある．

⑭ ボブとルーシーの両方が愛しているものがある．

⑮ ボブが愛しているものがあり，またルーシーが愛しているものがある．

⑯ ルーシーはボブに何かをあげた．

⑰ ボブはルーシーに指輪をあげた．

⑱ すべてのものがすべてのものを愛している．

⑲ あるものはあるものを愛している．

⑳ すべてのものを愛しているようなあるものが存在する．

㉑ どんなものも何かあるものに愛されている．

㉒ もしボブが自分自身を愛しているならば，彼は何かを愛している．

㉓ もしボブが自分自身を愛していないならば，彼は何も愛していない．

㉔ 任意の 3 つの対象について，もし第 1 の対象が第 2 の対象より背が高く，第 2 の対象が第 3 の対象より背が高いならば，第 1 の対象は第 3 の対象より背が高い．

---

① Mc ② Mb ③ $Mb \wedge Mc$ ④ $Mb \vee Mc$ ⑤ $Mb \vee Nb$ ⑥ Tcb ⑦ Lbc ⑧ Lbb ⑨ $\forall x\, Lbx$ ⑩ $\forall x\, Lxb$ ⑪ $\forall x\, Lxx$ ⑫ $\exists x\, Lxx$

⑬ $\exists x\, \neg Lcx$

⑭ $\exists x(Lbx \wedge Lcx)$

⑮ $(\exists x\, Lbx) \wedge (\exists x\, Lcx)$

⑯ $\exists x\, Gcbx$

⑰ $\exists x(Gbcx \wedge Rx)$

⑱ $\forall x \forall y\, Lxy$

⑲ $\exists x \exists y\, Lxy$

⑳ $\exists x \forall y\, Lxy$

㉑ $\forall x \exists y\, Lyx$

㉒ $Lbb \Rightarrow \exists x\, Lbx$

㉓ $\neg Lbb \Rightarrow \forall x\, \neg Lbx$

㉔ $(Txy \wedge Tyz) \Rightarrow Txz$

◆文はどれですか．文でないものについてはどれが自由変項ですか．

① $\forall x \exists y\, Rxy \Rightarrow \forall z\, Ryz$

② $\exists x(Fx \Rightarrow \forall y(Gy \Rightarrow Rxy))$

③ $\forall x(\exists y\, Rxy \vee Sxy)$

文は②である．他の文については，下に太字で示したところが自由変項．

① $\forall x \exists y\, Rxy \Rightarrow \forall z\, R\boldsymbol{y}z$

③ $\forall x(\exists y\, Rxy \vee Sx\boldsymbol{y})$

◆次を証明して下さい．（命題論理の証明論のつづき）

① $\exists x\, Fx \vdash \neg\forall x\, \neg Fx$

② $\exists x\, Fx \vdash \exists x(Fx \vee Gx)$

③ $\forall x(Fx \Rightarrow \neg Gx) \vdash \forall x(Gx \Rightarrow \neg Fx)$

---

①	1	(1)	$\exists x\, Fx$	Ass.
	2	(2)	Fa	H.
	3	(3)	$\forall x\, \neg Fx$	H.
	3	(4)	$\neg Fa$	3. $\forall$-E
	2, 3	(5)	$\perp$	2, 4. $\neg$-E
	2	(6)	$\neg\forall x\, \neg Fx$	3–5. $\neg$-I
	1	(7)	$\neg\forall x\, \neg Fx$	1, 2–6. $\exists$-E
②	1	(1)	$\exists x\, Fx$	Ass.
	2	(2)	Fa	H.
	2	(3)	$Fa \vee Ga$	2. $\vee$-I
	2	(4)	$\exists x(Fx \vee Gx)$	3. $\exists$-I
	1	(5)	$\exists x(Fx \vee Gx)$	1, 2–4. $\exists$-E
③	1	(1)	$\forall x(Fx \Rightarrow \neg Gx)$	Ass.
	2	(2)	Ga	H.
	3	(3)	Fa	H.
	1	(4)	$Fa \Rightarrow \neg Ga$	1. $\forall$-E
	1, 3	(5)	$\neg Ga$	3, 4. $\Rightarrow$-E
	1, 2, 3	(6)	$\perp$	2, 5. $\neg$-E

1, 2	(7)	$\neg Fa$	3–6. ¬-I
1	(8)	$Ga \Rightarrow \neg Fa$	2–7. ⇒-I
1	(9)	$\forall x(Gx \Rightarrow \neg Fx)$	8. ∀-I

(注) ここでは，H において，Fx, Gx などとは書かず，Fa, Ga と書く立場をとった．その方が量化における個体定項の制約が守られているかどうかが確認しやすいからです．

量化における個体定項の制約の確認は必ずやってください．

2.4 付 値 関 数

◆次を証明して下さい：$\models \forall x(Lxx \Rightarrow \exists y\, Lxy)$

背理法による．$\not\models \forall x(Lxx \Rightarrow \exists y\, Lxy)$ と仮定する．つまり，あるモデル A があって，そのモデル A では，

$$V_{\mathrm{A}}(\forall x(Lxx \Rightarrow \exists y\, Lxy)) = 0.$$

よって，ある定項 c について

$$V_{\mathrm{A}}(Lcc \Rightarrow \exists y\, Lcy) = 0.$$

したがって

$$\boldsymbol{V_{\mathrm{A}}(Lcc) = 1} \qquad \text{かつ} \qquad V_{\mathrm{A}}(\exists y\, Lcy) = 0.$$

だから，どんな定項 d をとっても，$V_{\mathrm{A}}(Lcd) = 0$.

$d = c$ とすると，$\boldsymbol{V_{\mathrm{A}}(Lcc) = 0}$.（矛盾）

以上により，$\models \forall x(Lxx \Rightarrow \exists y\, Lxy)$. ■

3 教科書の問題の解答

■第 3 章

問題 1

②	1	(1)	$P \wedge (P \Rightarrow Q)$	Ass.
	1	(2)	P	1. ∧-E
	1	(3)	$P \Rightarrow Q$	1. ∧-E
	1	(4)	Q	2, 3. ⇒-E

■第 4 章

問題 1

②	1	(1)	$P \Rightarrow (Q \wedge R)$	Ass.
	2	(2)	P	H.
	1, 2	(3)	$Q \wedge R$	1, 2. ⇒-E
	1, 2	(4)	R	3. ∧-E
	1	(5)	$P \Rightarrow R$	2–4. ⇒-I

問題 2

②	1	(1)	P	Ass.
	2	(2)	$P \Rightarrow Q$	Ass.
	3	(3)	$(P \wedge Q) \Rightarrow R$	Ass.
	1, 2	(4)	Q	1, 2. ⇒-E
	1, 2	(5)	$P \wedge Q$	1, 4. ∧-I
	1, 2, 3	(6)	R	3, 5. ⇒-E
④	1	(1)	$P \Rightarrow R$	Ass.
	2	(2)	$P \wedge Q$	H.
	2	(3)	P	2. ∧-E
	1, 2	(4)	R	1, 3. ⇒-E
	1	(5)	$(P \wedge Q) \Rightarrow R$	2–4. ⇒-I

問題 3

②	1	(1)	$\neg P \Rightarrow R$	Ass.
	2	(2)	$\neg P \wedge Q$	H.
	2	(3)	$\neg P$	2. ∧-I

2	(4)	Q	2. $\wedge$-I
1, 2	(5)	R	1, 3. $\Rightarrow$-E
1, 2	(6)	$R \vee (\neg Q \wedge P)$	5. $\wedge$-I
1	(7)	$(\neg P \wedge Q) \Rightarrow (R \vee (\neg Q \wedge P))$	2–6. $\Rightarrow$-I

問題 4

②

1	(1)	$P \Rightarrow R$	Ass.
2	(2)	$Q \Rightarrow R$	Ass.
3	(3)	$R \Rightarrow S$	Ass.
4	(4)	$P \vee Q$	H.
5	(5)	P	H.
1, 5	(6)	R	1, 5. $\Rightarrow$-E
1, 3, 5	(7)	S	3, 6. $\Rightarrow$-E
8	(8)	Q	H.
2, 8	(9)	R	2, 8. $\Rightarrow$-E
2, 3, 8	(10)	S	3, 9. $\Rightarrow$-E
1, 2, 3, 4	(11)	S	4, 5–7, 8–10. $\vee$-E
1, 2, 3	(12)	$(P \vee Q) \Rightarrow S)$	4–11. $\Rightarrow$-I

演習問題 1

①

1	(1)	$P \Rightarrow \neg Q$	Ass.
2	(2)	$Q \Rightarrow R$	Ass.
3	(3)	$R \Rightarrow P$	Ass.
4	(4)	Q	Ass.
5	(5)	Q	H.
2, 5	(6)	R	2, 5. $\Rightarrow$-E
2, 3, 5	(7)	P	3, 6. $\Rightarrow$-E
1, 2, 3, 5	(8)	$\neg Q$	1, 7. $\Rightarrow$-E
1, 2, 3, 4, 5	(9)	$\perp$	4, 8. $\neg$-E
1, 2, 3, 4	(10)	$\neg Q$	5–9. $\neg$-I

②：教科書の印刷ミスで (1) 式の太字の位置の括弧が抜けてます．

1	(1)	$(P \Rightarrow Q) \Rightarrow (R \Rightarrow ((P \Rightarrow Q) \Rightarrow S)\boldsymbol{)}$	Ass.
2	(2)	$P \Rightarrow Q$	Ass.
3	(3)	R	H.
1, 2	(4)	$R \Rightarrow ((P \Rightarrow Q) \Rightarrow S)$	1, 2. $\Rightarrow$-E
1, 2, 3	(5)	$(P \Rightarrow Q) \Rightarrow S$	3, 4. $\Rightarrow$-E
1, 2, 3	(6)	S	2, 5. $\Rightarrow$-E
1, 2	(7)	$R \Rightarrow S$	3–6. $\Rightarrow$-I

③

1	(1)	$P \Rightarrow (Q \Rightarrow R)$	H.
2	(2)	$P \wedge Q$	H.
2	(3)	P	2. $\wedge$-E
2	(4)	Q	2. $\wedge$-E
1, 2	(5)	$Q \Rightarrow R$	1, 3. $\Rightarrow$-E
1, 2	(6)	R	4, 5. $\Rightarrow$-E
1	(7)	$(P \wedge Q) \Rightarrow R$	2–6. $\Rightarrow$-I
	(8)	$(P \Rightarrow (Q \Rightarrow R)) \Rightarrow ((P \wedge Q) \Rightarrow R)$	1–7. $\Rightarrow$-I

最後の行は依存するものがない形になっているが，これはこの行がトートロジーであることを示している．

④

1	(1)	$P \Rightarrow (Q \Rightarrow R)$	Ass.
2	(2)	$P \Rightarrow Q$	H.
3	(3)	P	H.
1, 3	(4)	$Q \Rightarrow R$	1, 3. $\Rightarrow$-E
2, 3	(5)	Q	2, 3. $\Rightarrow$-E
1, 2, 3	(6)	R	4, 5. $\Rightarrow$-E
1, 2	(7)	$P \Rightarrow R$	3–6. $\Rightarrow$-I
1	(8)	$(P \Rightarrow Q) \Rightarrow (P \Rightarrow R)$	2–7. $\Rightarrow$-I

⑤

1	(1)	$P \vee Q$	Ass.
2	(2)	$P \Rightarrow R$	Ass.
3	(3)	$Q \Rightarrow S$	Ass.
4	(4)	P	H.
2, 4	(5)	R	2, 4. $\Rightarrow$-E
2, 4	(6)	$R \vee S$	5. $\vee$-I
7	(7)	Q	H.
3, 7	(8)	S	3, 7. $\Rightarrow$-E
3, 7	(9)	$R \vee S$	8. $\vee$-I
1, 2, 3	(10)	$R \vee S$	1, 4–6, 7–9. $\vee$-E

⑥	1	(1)	$P \Rightarrow Q$	Ass.
	2	(2)	P	H.
	1, 2	(3)	Q	1, 2. $\Rightarrow$-E
	1, 2	(4)	$Q \vee R$	3. $\vee$-I
	1	(5)	$P \Rightarrow (Q \vee R)$	2–4. $\Rightarrow$-I
⑦	1	(1)	$P \wedge (Q \vee R)$	Ass.
	1	(2)	P	1. $\wedge$-E
	1	(3)	$Q \vee R$	1. $\wedge$-E
	4	(4)	Q	H.
	1, 4	(5)	$P \wedge Q$	2, 4. $\wedge$-I
	1, 4	(6)	$(P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$	5. $\vee$-I
	7	(7)	R	H.
	1, 7	(8)	$P \wedge R$	2, 7. $\wedge$-I
	1, 7	(9)	$(P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$	8. $\vee$-I
	1	(10)	$(P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$	3, 4–6, 7–9. $\vee$-E
⑧	1	(1)	$(P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$	Ass.
	2	(2)	$P \wedge Q$	H.
	2	(3)	P	2. $\wedge$-E
	2	(4)	Q	2. $\wedge$-E
	2	(5)	$Q \vee R$	4. $\vee$-I
	2	(6)	$P \wedge (Q \vee R)$	3, 5. $\wedge$-I
	7	(7)	$P \wedge R$	H.
	7	(8)	P	7. $\wedge$-E
	7	(9)	R	7. $\wedge$-E
	7	(10)	$Q \vee R$	9. $\vee$-I
	7	(11)	$P \wedge (Q \vee R)$	8, 10. $\wedge$-I
	1	(12)	$P \wedge (Q \vee R)$	1, 2–6, 7–11. $\vee$-E

■第 5 章

問題 1

②	1	(1)	$\neg(P \vee Q)$	Ass.
	2	(2)	$P \wedge Q$	H.
	2	(3)	P	2. $\wedge$-E
	2	(4)	$P \vee Q$	3. $\vee$-I
	1, 2	(5)	$\bot$	1, 4. $\neg$-E
	1	(6)	$\neg(P \wedge Q)$	2–5. $\neg$-I

演習問題 1

①	1	(1)	$\neg\neg P$	H.
	1	(2)	P	1. DN-
		(3)	$\neg\neg P \Rightarrow P$	1, 2. $\Rightarrow$-I
②	1	(1)	P	H.
	2	(2)	$\neg P$	H.
	1, 2	(3)	$\bot$	1, 2. $\neg$-E
	1	(4)	$\neg\neg P$	2–3. $\neg$-I
		(5)	$P \Rightarrow \neg\neg P$	1–4. $\Rightarrow$-I
③	1	(1)	$P \Rightarrow S$	Ass.
	2	(2)	$Q \Rightarrow \neg S$	Ass.
	3	(3)	$P \wedge Q$	H.
	3	(4)	P	3. $\wedge$-E
	3	(5)	Q	3. $\wedge$-E
	1, 3	(6)	S	1, 4. $\Rightarrow$-E
	2, 3	(7)	$\neg S$	2, 5. $\Rightarrow$-E
	1, 2, 3	(8)	$\bot$	6, 7. $\neg$-E
	1, 2	(9)	$\neg(P \wedge Q)$	3–8. $\neg$-I

問題 3

②	1	(1)	P	Ass.
	2	(2)	$\neg P$	Ass.
	1	(3)	$P \vee Q$	1. $\vee$-I
	1, 2	(4)	Q	2, 3, -($P \vee Q$, $\neg P \vdash Q$).

演習問題 2

①	1	(1)	$\neg(P \wedge \neg Q)$	Ass.
	2	(2)	P	H.
	3	(3)	$\neg Q$	H.
	2, 3	(4)	$P \wedge \neg Q$	2, 3. $\wedge$-I
	1, 2, 3	(5)	$\bot$	1, 4. $\neg$-E

	1, 2	(6)	$\neg\neg Q$	3–5. ¬-I
	1, 2	(7)	Q	6. DN-
	1	(8)	$P \Rightarrow Q$	2–7. ⇒-I
②	1	(1)	$P \Rightarrow Q$	Ass.
	2	(2)	$Q \Rightarrow \neg P$	Ass.
	3	(3)	P	H.
	1, 3	(4)	Q	1, 3. ⇒-E
	1, 2, 3	(5)	$\neg P$	2, 4. ⇒-E
	1, 2, 3	(6)	$\bot$	3, 5. ¬-E
	1, 2	(7)	$\neg P$	3–6. ¬-I
③	1	(1)	$\neg(P \vee Q)$	Ass.
	2	(2)	P	H.
	2	(3)	$P \vee Q$	2. ∨-I
	1, 2	(4)	$\bot$	1, 3. ¬-E
	1	(5)	$\neg P$	2–4. ¬-I
	6	(6)	Q	H.
	6	(7)	$P \vee Q$	6. ∨-I
	1, 6	(8)	$\bot$	1, 7. ¬-E
	1	(9)	$\neg Q$	6–8. ¬-I
	1	(10)	$\neg P \wedge \neg Q$	5, 9. ∧-I

■第 6 章

問題 1

②	1	(1)	$P \vee (Q \Rightarrow R)$	Ass.
	2	(2)	Q	Ass.
	3	(3)	P	H.
	3	(4)	$P \vee R$	3. ∨-I
	5	(5)	$Q \Rightarrow R$	H.
	2, 5	(6)	R	2, 5. ⇒-E
	2, 5	(7)	$P \vee R$	6. ∨-I
	1, 2	(8)	$P \vee R$	1, 3–4, 5–7. ∨-E
④	1	(1)	$P \Rightarrow Q$	Ass.
	2	(2)	$\neg P \Rightarrow Q$	Ass.
	3	(3)	$\neg Q$	H.
	4	(4)	P	H.
	1, 4	(5)	Q	1, 4. ⇒-E
	1, 3, 4	(6)	$\bot$	3, 5. ¬-E
	1, 3	(7)	$\neg P$	4–6. ¬-I
	1, 2, 3	(8)	Q	2, 7. ⇒-E
	1, 2, 3	(9)	$\bot$	3, 8. ¬-E
	1, 2	(10)	$\neg\neg Q$	3–9. ¬-I
	1, 2	(11)	Q	10. DN–

問題 2

②	1	(1)	$P \Rightarrow Q$	Ass.
	2	(2)	$Q \Rightarrow R$	Ass.
	3	(3)	$R \Rightarrow P$	Ass.
	4	(4)	P	H.
	1, 4	(5)	Q	1, 4. ⇒-E
	1	(6)	$P \Rightarrow Q$	4–5. ⇒-I
	7	(7)	Q	H.
	2, 7	(8)	R	2, 7. ⇒-E
	2, 3, 7	(9)	P	3, 8. ⇒-E
	2, 3	(10)	$Q \Rightarrow P$	7–9. ⇒-I
	1, 2, 3	(11)	$(P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P)$	6, 10. ∧-I
	1, 2, 3	(12)	$P \Leftrightarrow Q$	11. Def-⇔

演習問題 1

①	1	(1)	P	H.
	2	(2)	$\neg P$	H.
	1, 2	(3)	$\bot$	1, 2. ¬-E
	1	(4)	$\neg\neg P$	2–3. ¬-I
		(5)	$P \Rightarrow \neg\neg P$	1–4. ⇒-I
	6	(6)	$\neg\neg P$	H.
	6	(7)	P	6. DN–
		(8)	$\neg\neg P \Rightarrow P$	6–7. ⇒-I
		(9)	$(P \Rightarrow \neg\neg P) \wedge (\neg\neg P \Rightarrow P)$	5, 8. ∧-I

	(10)	$P \Leftrightarrow \neg\neg P$	9. Def-$\Leftrightarrow$

② この問題と③，④は複雑なので注意！

1	(1)	$\neg(P \vee Q)$	H.
2	(2)	P	H.
3	(3)	Q	H.
3	(4)	$P \vee Q$	3. $\vee$-I
1, 3	(5)	$\perp$	1, 4. $\neg$-E
1	(6)	$\neg Q$	3–5. $\neg$-I
2	(7)	$P \vee Q$	2. $\vee$-I
1, 2	(8)	$\perp$	1, 7. $\neg$-E
1	(9)	$\neg P$	2–8. $\neg$-I
1	(10)	$\neg P \wedge \neg Q$	6, 9. $\wedge$-I
	(11)	$\neg(P \vee Q) \Rightarrow (\neg P \wedge \neg Q)$	1–10. $\Rightarrow$-I
12	(12)	$\neg P \wedge \neg Q$	H.
13	(13)	$P \vee Q$	H.
14	(14)	P	H.
12	(15)	$\neg P$	12. $\wedge$-E
12, 14	(16)	$\perp$	14, 15. $\neg$-E
17	(17)	Q	H.
12	(18)	$\neg Q$	12. $\wedge$-E
12, 17	(19)	$\perp$	17, 18. $\neg$-E
12, 13	(20)	$\perp$	13, 14–16, 17–19. $\vee$-E
12	(21)	$\neg(P \vee Q)$	13–20. $\neg$-I
	(22)	$(\neg P \wedge \neg Q) \Rightarrow \neg(P \vee Q)$	12–21. $\Rightarrow$-I
	(23)	$(\neg(P \vee Q) \Rightarrow (\neg P \wedge \neg Q))$	11, 22. $\wedge$-I
		$\wedge ((\neg P \wedge \neg Q) \Rightarrow \neg(P \vee Q))$	
	(24)	$\neg(P \vee Q) \Leftrightarrow (\neg P \wedge \neg Q)$	23. Def-$\Leftrightarrow$

③

1	(1)	$\neg(P \wedge Q)$	H.
2	(2)	P	H.
3	(3)	Q	H.
2, 3	(4)	$P \wedge Q$	2, 3. $\wedge$-I
1, 2, 3	(5)	$\perp$	1, 4$\neg$-E
1, 2	(6)	$\neg Q$	3–5. $\neg$-I
1, 2	(7)	$\neg P \vee \neg Q$	6. $\vee$-I
1	(8)	$P \Rightarrow (\neg P \vee \neg Q)$	2–7. $\Rightarrow$-I
9	(9)	$\neg(\neg P \vee \neg Q)$	H.
10	(10)	$\neg P$	H.
10	(11)	$\neg P \vee \neg Q$	10. $\vee$-I
9, 10	(12)	$\perp$	9, 11. $\neg$-E
9	(13)	P	10–12. $\neg$-I
1, 9	(14)	$\neg P \vee \neg Q$	8, 13. $\Rightarrow$-E
1, 9	(15)	$\perp$	9, 14. $\neg$-E
1	(16)	$\neg\neg(\neg P \vee \neg Q)$	9–15. $\neg$-I
1	(17)	$\neg P \vee \neg Q$	16. DN-
	(18)	$\neg(P \wedge Q) \Rightarrow (\neg P \vee \neg Q)$	1–17. $\Rightarrow$-I
19	(19)	$\neg P \vee \neg Q$	H.
20	(20)	$P \wedge Q$	H.
20	(21)	P	20. $\wedge$-E
20	(22)	Q	20. $\wedge$-E
23	(23)	$\neg P$	H.
20, 23	(24)	$\perp$	21, 23. $\neg$-E
25	(25)	$\neg Q$	H.
20, 25	(26)	$\perp$	22, 25. $\neg$-E
19, 20	(27)	$\perp$	19, 23–24, 25–26. $\vee$-E
19	(28)	$\neg(P \wedge Q)$	20–27. $\neg$-I
	(29)	$(\neg P \vee \neg Q) \Rightarrow \neg(P \wedge Q)$	19–28. $\Rightarrow$-I
	(30)	$(\neg(P \wedge Q) \Rightarrow (\neg P \vee \neg Q))$	18, 29. $\wedge$-I
		$\wedge ((\neg P \vee \neg Q) \Rightarrow \neg(P \wedge Q))$	
	(31)	$\neg(P \wedge Q) \Leftrightarrow (\neg P \vee \neg Q)$	30. Def-$\Leftrightarrow$

④

1	(1)	$P \vee Q$	H.
2	(2)	$\neg P \wedge \neg Q$	H.
2	(3)	$\neg P$	2. $\wedge$-E
2	(4)	$\neg Q$	2. $\wedge$-E
5	(5)	P	H.

2, 5	(6)	$\bot$	3, 5. $\neg$-E
7	(7)	Q	H.
2, 7	(8)	$\bot$	4, 7. $\neg$-E
1, 2	(9)	$\bot$	1, 5–6, 7–8. $\vee$-E
1	(10)	$\neg(\neg P \wedge \neg Q)$	2–9. $\neg$-I
	(11)	$(P \vee Q) \Rightarrow \neg(\neg P \wedge \neg Q)$	1–10. $\Rightarrow$-I
12	(12)	$\neg(\neg P \wedge \neg Q)$	H.
13	(13)	$\neg(P \vee Q)$	H.
14	(14)	P	H.
14	(15)	$P \vee Q$	14. $\vee$-I
13, 14	(16)	$\bot$	13, 15. $\neg$-E
13	(17)	$\neg P$	14–16. $\neg$-I
18	(18)	Q	H.
18	(19)	$P \vee Q$	18. $\vee$-I
13, 18	(20)	$\bot$	13, 19. $\neg$-E
13	(21)	$\neg Q$	18–20. $\neg$-I
13	(22)	$\neg P \wedge \neg Q$	17, 21. $\wedge$-I
12, 13	(23)	$\bot$	12, 22. $\neg$-E
12	(24)	$\neg\neg(P \vee Q)$	13–23. $\neg$-I
12	(25)	$P \vee Q$	24. DN-
	(26)	$\neg(\neg P \wedge \neg Q) \Rightarrow (P \vee Q)$	12–25. $\Rightarrow$-I
	(27)	$((P \vee Q) \Rightarrow \neg(\neg P \wedge \neg Q))$	11, 26. $\wedge$-I
		$\wedge\, (\neg(\neg P \wedge \neg Q) \Rightarrow (P \vee Q))$	
	(28)	$(P \vee Q) \Leftrightarrow \neg(\neg P \wedge \neg Q)$	27. Def-$\Leftrightarrow$

注意　これらの証明は，教科書 p. 94，6.3 節中の内容を利用せずに行ったもので（p. 95 中段よりちょっと下の 1〜4 を守った），利用すればかなり簡単になります．

⑤

1	(1)	$P \Rightarrow (Q \Rightarrow R)$	H.
2	(2)	$P \wedge Q$	H.
2	(3)	P	2. $\wedge$-E
2	(4)	Q	2. $\wedge$-E
1, 2	(5)	$Q \Rightarrow R$	1, 3. $\Rightarrow$-E
1, 2	(6)	R	4, 5. $\Rightarrow$-E
1	(7)	$(P \wedge Q) \Rightarrow R$	2–6. $\Rightarrow$-I
	(8)	$(P \Rightarrow (Q \Rightarrow R)) \Rightarrow ((P \wedge Q) \Rightarrow R)$	1–7. $\Rightarrow$-I
9	(9)	$(P \wedge Q) \Rightarrow R$	H.
10	(10)	P	H.
11	(11)	Q	H.
10, 11	(12)	$P \wedge Q$	10, 11. $\wedge$-I
9, 10, 11	(13)	R	9, 12. $\Rightarrow$-E
9, 10	(14)	$Q \Rightarrow R$	11–13. $\Rightarrow$-I
9	(15)	$P \Rightarrow (Q \Rightarrow R)$	10–14. $\Rightarrow$-I
	(16)	$((P \wedge Q) \Rightarrow R) \Rightarrow (P \Rightarrow (Q \Rightarrow R))$	9–15. $\Rightarrow$-I
	(17)	$((P \Rightarrow (Q \Rightarrow R)) \Rightarrow ((P \wedge Q) \Rightarrow R))$	8, 16. $\wedge$-I
		$\wedge\, (((P \wedge Q) \Rightarrow R) \Rightarrow (P \Rightarrow (Q \Rightarrow R)))$	
	(18)	$(P \Rightarrow (Q \Rightarrow R)) \Leftrightarrow ((P \wedge Q) \Rightarrow R)$	17. Def-$\Leftrightarrow$

⑥

1	(1)	$P \wedge Q$	H.
1	(2)	P	1. $\wedge$-E
1	(3)	Q	1. $\wedge$-E
1	(4)	$Q \wedge P$	2, 3. $\wedge$-I
	(5)	$(P \wedge Q) \Rightarrow (Q \wedge P)$	1–4. $\Rightarrow$-I
6	(6)	$Q \wedge P$	H.
6	(7)	Q	6. $\wedge$-E
6	(8)	P	6. $\wedge$-E
6	(9)	$P \wedge Q$	7, 8. $\wedge$-I
	(10)	$(Q \wedge P) \Rightarrow (P \wedge Q)$	6–9. $\Rightarrow$-I
	(11)	$((P \wedge Q) \Rightarrow (Q \wedge P))$	5, 10. $\wedge$-I
		$\wedge\, ((Q \wedge P) \Rightarrow (P \wedge Q))$	
	(12)	$(P \wedge Q) \Leftrightarrow (Q \wedge P)$	11. Def-$\Leftrightarrow$

⑦

1	(1)	$P \vee Q$	H.
2	(2)	P	H.
2	(3)	$Q \vee P$	2. $\vee$-I
4	(4)	Q	H.
4	(5)	$Q \vee P$	4. $\vee$-I

1	(6)	$Q \vee P$	1, 2–3, 4–5. $\vee$-E
	(7)	$(P \vee Q) \Rightarrow (Q \vee P)$	1–7. $\Rightarrow$-I
8	(8)	$Q \vee P$	H.
9	(9)	Q	H.
9	(10)	$P \vee Q$	9. $\vee$-I
11	(11)	P	H.
11	(12)	$P \vee Q$	11. $\vee$-I
8	(13)	$P \vee Q$	8, 9–10, 11–12. $\vee$-E
	(14)	$(Q \vee P) \Rightarrow (P \vee Q)$	8–13. $\Rightarrow$-I
	(15)	$((P \vee Q) \Rightarrow (Q \vee P))$ $\wedge ((Q \vee P) \Rightarrow (P \vee Q))$	7, 14. $\wedge$-I
	(16)	$(P \vee Q) \Leftrightarrow (Q \vee P)$	15. Def-$\Leftrightarrow$

■第 7 章

問題 2

②	1	(1)	$(\forall x)(Fx \Rightarrow Gx)$	Ass.
	2	(2)	$(\forall y)Fy$	Ass.
	2	(3)	Fa	2. $\forall$-E
	1	(4)	$Fa \Rightarrow Ga$	1. $\forall$-E
	1, 2	(5)	Ga	3, 4. $\Rightarrow$-E

問題 3　以下，量化子における個体定項の制約に十分注意してください．

②	1	(1)	$(\forall x)(Fx \Rightarrow (\forall y)(Gy))$	Ass.
	1	(2)	$(\forall x)(Fx \Rightarrow Gb)$	1. $\forall$-E
	1	(3)	$Fa \Rightarrow Gb$	2. $\forall$-E
	1	(4)	$(\forall y)(Fa \Rightarrow Gy)$	3. $\forall$-I
	1	(5)	$(\forall x)(\forall y)(Fx \Rightarrow Gy)$	4. $\forall$-I

■第　8　章

問題 1

②	1	(1)	$(\forall x)Fx$	Ass.
	1	(2)	Fa	1. $\forall$-E
	1	(3)	$Fa \vee Ga$	2. $\vee$-I
	1	(4)	$(\exists x)(Fx \vee Gx)$	3. $\exists$-I

問題 2

②	1	(1)	$(\exists x)\neg Fx$	Ass.
	2	(2)	$\neg Fa$	H.
	3	(3)	$(\forall x)Fx$	H.
	3	(4)	Fa	3. $\forall$-E
	2, 3	(5)	$\perp$	2, 4. $\neg$-E
	2	(6)	$\neg(\forall x)Fx$	3–5. $\neg$-I
	1	(7)	$\neg(\forall x)Fx$	1, 2–6. $\exists$-E

■第　9　章

問題 4

②	1	(1)	$\neg(\forall x)\neg Fx$	Ass.
	2	(2)	$\neg(\exists x)Fx$	H.
	3	(3)	Fa	H.
	3	(4)	$(\exists x)Fx$	3. $\exists$-I
	2, 3	(5)	$\perp$	2, 4. $\neg$-E
	2	(6)	$\neg Fa$	3–5. $\neg$-I
	2	(7)	$(\forall x)\neg Fx$	6. $\forall$-I
	1, 2	(8)	$\perp$	1, 7. $\neg$-E
	1	(9)	$\neg\neg(\exists x)Fx$	2–8. $\neg$-I
	1	(10)	$(\exists x)Fx$	9. DN-

■第 10 章

問題 1

②	1	(1)	$a = b$	H.
		(2)	$b = b$	=-I
	1	(3)	$b = a$	1, 2.=-E
		(4)	$a = b \Rightarrow b = a$	1, 3. $\Rightarrow$-I
		(5)	$(\forall y)(a = y \Rightarrow y = a)$	4. $\forall$-I
		(6)	$(\forall x)(\forall y)(x = y \Rightarrow y = x)$	5. $\forall$-I

解答に間違いがあったら，すぐに**はらけん**までよろしく！

4 過　去　問

現段階では授業でやってない部分もあるので，解答はわかり次第 up します！

1. 次のうちトートロジーには○，そうでないものには×を解答欄に記入しなさい．
   (a) $(A \to B) \vee (B)$
   (b) $\neg[(A \vee (B \Rightarrow C)) \Leftrightarrow B]$
   (c) $(A \Rightarrow C) \Rightarrow [\neg(B \Rightarrow C) \Rightarrow ((A \vee B) \Rightarrow C)]$
   (d) $((A \vee B) \Rightarrow C) \Leftrightarrow ((A \Rightarrow C) \wedge (B \Rightarrow C))$
   (e) $\neg[(A \vee B) \Leftrightarrow (\neg A \Rightarrow B)]$
2. 次の証明の空欄に入る適切な語・記号 (式)・数字を解答欄に記入しなさい．

$$\forall x \exists y \exists z\, Lxyz \vdash \forall z(\neg Fz \Rightarrow \forall y\, Lyaz) \Rightarrow \forall y \forall z(Fz \wedge Lyaz)$$

1	(1)	$\forall x \exists y \exists z\, Lxyz$	Ass.
2	(2)	$\forall z(\neg Fz \Rightarrow \forall y\, Lyaz)$	H.
1	(3)	$\exists y \exists z\, Lyaz$	1. $\forall$-E
4	(4)	$\exists z\, Lyaz$	H.
$\boxed{1}$	(5)	$Lyaz$	$\boxed{2}$
$\boxed{3}$	(6)	$\neg Fz$	$\boxed{4}$
2	(7)	$\neg Fz \Rightarrow \forall y \neg Lyaz$	2. $\forall$-E
2, 6	(8)	$\forall y \neg Lyaz$	6, 7. $\Rightarrow$-E
2, 6	(9)	$\neg Lyaz$	8. $\forall$-E
2, 5, 6	(10)	$\perp$	5, 9. $\neg$-E
$\boxed{5}$	(11)	$\neg\neg Fz$	6–10. $\neg$-I
2, 5	(12)	Fz	11. DN-
2, 5	(13)	$\boxed{6}$	5, 12. $\vee$-I
2, 5	(14)	$\exists z(Fz \wedge Lyaz)$	13. $\exists$-I
2, 5	(15)	$\exists y \exists z(Fz \wedge Lyaz)$	$\boxed{7}$
2, 5	(16)	$\boxed{8}$	4, 5–15. $\exists$-E
1, 2	(17)	$\exists y \exists z(Fz \wedge Lyaz)$	$\boxed{9}$
1	(18)	$\boxed{10}$	2–17. $\Rightarrow$-I

3. 以下は，$\forall x(Qx \Rightarrow Px) \vDash \forall x \forall y((Px \wedge Rxy) \Rightarrow (Qx \wedge Rxy))$ を示すための意味論的論証である．空欄に入る適切な語・記号・数字を解答欄に記入しなさい．

いま，$V_{\mathrm{A}}(\forall x(Qx \Rightarrow Px)) = \mathrm{T}$—(1) となるような，任意の構造 A における任意の付値関数 V_{A} を考える．$\boxed{\mathrm{A}}$ の仮定として，この付値関数のもとで $V_{\mathrm{A}}(\boxed{\mathrm{B}}) = \mathrm{F}$ とする．$\forall$ に対する付値関数の定義により，ある $d \in D$ について $V_{\mathrm{A}}(\forall y((Pd \wedge Rdy) \Rightarrow (Qd \wedge Rdy))) = \mathrm{F}$ でなければならないが (D は構造 A のドメインとする)．ふたたび $\forall$ に関する付値関数の定義により，ある $\boxed{\mathrm{C}}$ について，$V_{\mathrm{A}}((Pd \wedge Rde) \Rightarrow (Qd \wedge Rde)) = \mathrm{F}$ でなければならない．これより，$\boxed{\mathrm{D}}$ に関する付値関数の定義に基づいて，$V_{\mathrm{A}}(Pd \wedge Rde) = \mathrm{T}$ かつ $V_{\mathrm{A}}(Qd \wedge Rde) = \mathrm{F}$ が帰結する．このとき，前者から，$\boxed{\mathrm{E}}$—(2) かつ $V_{\mathrm{A}}(Rde) = \mathrm{T}$—(3)，後者から $V_{\mathrm{A}}(Qd) = \mathrm{F}$ か，または $V_{\mathrm{A}}(Rde) = \mathrm{F}$ でなければならない．このとき，(3) が成立している以上，$V_{\mathrm{A}}(Rde) = \mathrm{F}$ ではありえない．したがって，$V_{\mathrm{A}}(Qd) = \mathrm{F}$ でなくてはならない．しかし，(1) から $V_{\mathrm{A}}(Qd \Rightarrow Pd) = \mathrm{T}$ が成立しており，かつまた (2) より，$V_{\mathrm{A}}(Qd) = \mathrm{T}$ でなくてはならないが，これは矛盾である．よって，上の推論の妥当性が示された．

4. 次は，形式的なペアノ算術における，$\forall x \forall y(S(x) + y = S(x + y))$ の証明である．空欄にあてはまる適切な式・記号・数字を解答欄に記入しなさい．（ただし，以下において (A3): $x + 0 = x$, (A4): $x + S(y) = s(x + y)$ とする．）

	(1)	$S(x) + 0 = S(x)$	A3 の代入事例
	(2)	$x + 0 = x$	A3
	(3)	$\boxed{1}$	=-I
	(4)	$S(x + 0) = S(x)$	2, 3. =-I
	(5)	$S(x) + 0 = S(x + 0)$	1, 4. =-I
6	(6)	$S(x) + y = S(x + y)$	H.
	(7)	$S(x) + S(y) = S(S(x) + y)$	A4 の代入事例
	(8)	$S(S(x) + y) = S(S(x) + y)$	=-I
6	(9)	$S(S(x) + y) = S(S(x + y))$	6, 8, $\boxed{2}$
$\boxed{3}$	(10)	$S(x) + S(y) = S(S(x + y))$	7, 9. =-E
	(11)	$x + S(y) = S(x + y)$	A4
	(12)	$S(x + S(y)) = S(x + S(y))$	=-I
6	(13)	$S(x + S(y)) = S(S(x + y))$	10, 11. =-E

6 (14) $S(x) + S(y) = S(x + S(y))$ 　　11, 13. =-E

(15) $(S(x) + y = S(x + y))$ 　　$\boxed{\quad 4 \quad}$

$\Rightarrow (S(x) + S(y) = S(x + S(y)))$

(16) $\boxed{\quad 5 \quad}$ 　　5, 15. Ind

(17) $\forall x \forall y(S(x) + y = S(x + y))$ 　　16. $\forall$-I

5. 次のものを自然演繹体系において証明しなさい.

(a) $\vdash (A \Rightarrow B) \Rightarrow (\neg\neg A \Rightarrow \neg\neg B)$

(b) $\vdash (\neg\neg A \Rightarrow \neg\neg B) \Rightarrow \neg\neg(A \Rightarrow B)$

（ヒント：最初に仮定 $\neg(A \Rightarrow B)$ から $\neg\neg A$ と $\neg B$ の導出を構成せよ.）

(c) $\vdash \neg\exists x\, Fx \Rightarrow \forall x \neg Fx$

(d) $\exists x(\neg Fx \Rightarrow \exists y \neg Fy) \vdash \neg\forall z\, Fz$

以上