

電磁気学の数学?

by 吉田文哉

シケ対だったことを思い出したので一応文書を出しておきます。と思ったらなんだか既にもものすごいのが出てますね。まあもう書いてしまったので。趣向も違いますし。試験対策の終わった人は読みましょう。内容は電磁気学というよりは、その数学面。とりあえずいつてみましようか。しかし数学Iともう1教科シケ対だった気がするけど・・・思い出せないしメール消しちゃったので触れないことにしましようか。

§1 基本

まずは基本、ベクトルの演算から始めましよう。わかってる人は飛ばしましよう。内積はいいでしょうから、外積から。外積ってどういう演算でしょう?その意味は、与えられた二つのベクトルが張る(符号付の)平行四辺形の面積を長さとし、かつ二つのベクトルに垂直なベクトルです。まあ一応三次元のみ扱うってことで。これを式で書くと、

$$|\vec{A} \times \vec{B}| = |\vec{A}| |\vec{B}| \sin \theta (\theta \text{は } \vec{A} \text{ と } \vec{B} \text{ の成す角})$$

$$\vec{A} \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) = \vec{B} \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) = 0$$

ということになります。ちなみに二つ目の式のカッコは、計算できる順に演算するという暗黙の規則があるので必要ありません。ついでに基本的な性質として、

$$\vec{A} \times \vec{B} = -\vec{B} \times \vec{A}$$

もあります。順番を変えると符号が逆になります。これらの意味はきっちり覚えておきましよう。そして、以上の性質を満たすベクトルの成分として、次のようなきれいな定理が成り立ちます。

$$\vec{A} \times \vec{B} = \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} B_x \\ B_y \\ B_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_y B_z - A_z B_y \\ A_z B_x - A_x B_z \\ A_x B_y - A_y B_x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |A_y & B_y \\ A_z & B_z| \\ |A_z & B_z| \\ |A_x & B_x| \\ |A_x & B_x| \\ |A_y & B_y| \end{pmatrix}$$

真ん中から始まって、クロスさせてかけたものからクロスさせてかけたものを引く、って感じで。この計算方法を今回の電磁気学として覚える必要があるかは疑問ですが、行列式の計算、

$$\det(\vec{A} \ \vec{B} \ \vec{C}) = \vec{A} \cdot \vec{B} \times \vec{C} = \vec{B} \cdot \vec{C} \times \vec{A} = \vec{C} \cdot \vec{A} \times \vec{B}$$

で使えるし、外積は個人的にかっこいいと思うので、ぜひ覚えておきましよう。なお、この式は「行列式は体積である」ということを意味しています。内積は順番を変えてもいいですが外積は符号が変わるので注意しましよう。

さて、お次はこちら。

$$\vec{\nabla} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix}$$

∇ はナブラ、 ∂ はラウンドって読みますね。こいつの使い方は主に3つ。そのまま、内積、外積です。つまり、

$$\vec{\nabla} A = \begin{pmatrix} \frac{\partial A}{\partial x} \\ \frac{\partial A}{\partial y} \\ \frac{\partial A}{\partial z} \end{pmatrix}, \vec{\nabla} \cdot \vec{V} = \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial z}, \vec{\nabla} \times \vec{V} = \begin{pmatrix} \frac{\partial V_z}{\partial y} - \frac{\partial V_y}{\partial z} \\ \frac{\partial V_x}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial x} \\ \frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial y} \end{pmatrix}$$

となります。それぞれグラディエント(grad, 勾配)、ダイバージェンス(div, 発散)、ローテーション(rot, 回転)と呼ばれます。あの先生ダイバージェンスのドットが見えづらいんですよ。それはどうでもいいとして、皆さんご存知のように、この記号は単独で使われてしまいますね。

$$(\nabla^2 + U)\psi = E\psi$$

のような形で。これは微分演算子 $\frac{\partial}{\partial x}$ とかを普通の数のように扱ってやれ、ということです。こんなことして本当にいいんでしょうか?ある規則を守っている限りいいんです。そう、順番ですね。偏微分が可能なら順番を変えていい、みたいなことを覚えていますか?つまり $\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} A = \frac{\partial^2}{\partial y \partial x} A$

です。それに対し、 $\frac{\partial}{\partial x} A \neq A \frac{\partial}{\partial x}$ ですね。というかこれはわけがわかりません。つまり、微分の外に出していいものとダメなものを判定して、ダメなもの順番さえ変えないようにすれば、普通の数と同じ演算規則が成り立つため、普通の数と同様に扱えるということです。こうやって表記を簡略化できます。ついでに、 $\Delta = \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ という記号もありますね。ラプラス演算子と呼びます。

§2 座標変換

これもわかっている人は飛ばしましょう。まあ、使う座標変換は円筒座標と極座標のみですね。円筒座標は何も考えなくてもわかると思うので、極座標を。極座標、覚えちゃいましょう。一般的に使われる極座標の形は、

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \sin \theta \cos \phi \\ r \sin \theta \sin \phi \\ r \cos \theta \end{pmatrix}$$

ですね。zは仲間はずれにして θ のコサインだけかけて、x,yは ϕ のコサイン、サインをかける、って感じで。この場合、 $dx dy dz = r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi$ が成り立ちます。これは積分する時に必要となりますね。この意味は簡単で、どれほど体積が変わるかをきっちり考えてみればいだけなんです。が、(私は)計算間違いをしやすいので、これくらいは覚えちゃっていいでしょう。なお、ヤコビの行列式Jとかいうのがあって、

$$dv = dx dy dz = J du_1 du_2 du_3, J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u_1} & \frac{\partial x}{\partial u_2} & \frac{\partial x}{\partial u_3} \\ \frac{\partial y}{\partial u_1} & \frac{\partial y}{\partial u_2} & \frac{\partial y}{\partial u_3} \\ \frac{\partial z}{\partial u_1} & \frac{\partial z}{\partial u_2} & \frac{\partial z}{\partial u_3} \end{vmatrix}$$

が成り立ちますね。行列式は転置をとっても等しいことに注意しましょう。この意味は、縦ベクトル三つに分かれていると見て、x,y,zの変化に対する u_1, u_2, u_3 それぞれの方向の成分をとり、それらのベクトルのはる体積をかけてやればいい、ということです。しかし、実際にこれを計算するのは大変です。極座標しか使わないと思うので、余裕がなければ結果を覚えるだけでいいかもしれません。

§3 線積分、面積積分、体積積分

さあ、早くも書くのが面倒になってきました。線積分と体積積分は直感的にわかりますよね。ということで省略で。では、面積積分はどうでしょう。 $\int_S d\vec{a} \cdot \vec{V}(\vec{r})$ ということ、 $d\vec{a}$ は微小面積を持ち、その点における法線ベクトル方向を向いたベクトルとのことですが、こいつが怪しい。具体的な成分がわけわかりませんね。しかし、この具体的な成分は本当に複雑になります。まず、曲面上の点は二つのパラメータで表されるということからはじめなければなりません。つまり、

$$\vec{r} = \vec{\psi}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$$

と書けるということです。こうして、さらに法線方向の単位ベクトル \vec{n} を用いれば、

$$\int_u \int_v \vec{n} \cdot \vec{V}(\vec{\psi}(u, v)) |\vec{\psi}_u \times \vec{\psi}_v| du dv$$

となり、やっと具体的な計算ができそうな形になりました。表記は適当なので気をつけてください。こんな覚え方でいいですよ。具体的に計算するのはやめておいた方がいい、と言いたかった訳です。ということで、面積積分を行うには適宜意味を解釈して考えなければなりません。どうせ具体的な計算をすることはほとんどありませんから。

§4 立体角

立体角、ガウスの定理で出てきましたね。ガウスの定理は、電場の合計は内部の電荷の合計のみによって決まるってやつです。すなわち、

$$\int_S d\vec{a} \cdot \vec{E}(\vec{x}) = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

というわけです。立体角の定義は、半径1の球面に占める面積を見込む角度だそうで。はいわけわかりませんね。しかし、これを使うとガウスの定理の証明が本当にあっさり理解できてしまいます。本当に使うのは、全範囲で考えれば半径1の球面の表面積 4π になるということくらいです。で、ミソとなるのは立体角を Ω として

$$\int_S d\vec{a} \cdot \frac{\vec{x}}{|\vec{x}|^3} = \int_S d\Omega = \Omega = 4\pi$$

となるということ。なお、 \vec{x} の基準位置は球面の中心にとりました。さて、よ〜く見てください。これは $\frac{d\vec{a} \cdot \vec{x}}{|\vec{x}|^2 |\vec{x}|}$ と見るのが正しいのです。 $|d\vec{a}|$ は微小面積ですよ。そう、面積は2乗に比例するので、面積を半径1に相当するように換算し、あとは内積を用いて有効な方向の成分を取るので(マイナスになったりもします)。そうすれば、確かに微小立体角になりますね。この全体の和をとれば、必ず 4π になるというシナリオです。そうすれば、クーロンの法則から

$$\vec{E}(\vec{x}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{x}}{|\vec{x}|^3}, \int_S d\vec{a} \cdot \vec{E}(\vec{x}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \int_S d\vec{a} \cdot \frac{\vec{x}}{|\vec{x}|^3} = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

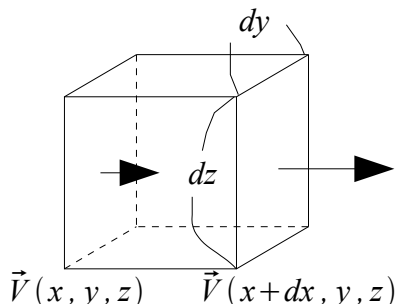
となり、ガウスの法則が導かれます。なんだか適当な説明でしたが、本質はこんな感じです。まあ先生の行った説明とあわせて理解してください。

§5 積分定理

さて、やっとここまでできました。発散定理と回転定理です。これらはそれぞれ、面積積分を体積積分、線積分を面積積分に関連付けるための定理です。実はこれらの定理、むしろ発散や回転がこの定理を満たすように作られている、と考えた方がいいような感じです。それでは、発散定理の証明を試みましょう。発散定理(ガウスの定理)は、

$$\int_V dv \vec{\nabla} \cdot \vec{V}(\vec{x}) = \int_S d\vec{a} \cdot \vec{V}(\vec{x})$$

でした。重要なのは、下のような微小な直方体を考えてみることです。



この左右の面からの「流出量」を考えるのです。この左右の面両方からの流出量の x 成分は、

$$dy dz [(\vec{V}_x(x+dx, y, z) - \vec{V}_x(x, y, z))] = dy dz \frac{\partial V_x}{\partial x} dx$$

となります。もはや半分見えてしまいましたね。これを y, z 方向もあわせて、微小な直方体を集めてやれば、「流出量」の合計である右辺の和は

$$\int_V dx dy dz \left(\frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z} \right) = \int_V dv \vec{\nabla} \cdot \vec{V}(\vec{x})$$

となります。それでは左辺はどうでしょうか。とりあえずたくさん集めてみましょう。すると、隣り合った

直方体同士での流出量が打ち消されるのがわかると思います。ちょうど一次元の積分が両端の値だけで決まるように、この左辺の和も境界の値しか残らなくなります。わかりやすくシンボリックに書くと

$$\begin{aligned} (\text{左辺}) &= dydz [\dots + V_x(x, y, z) - V_x(x-dx, y, z) + V_x(x+dx, y, z) - V_x(x, y, z) + \dots] \\ &= dydz [V_x(X, y, z) - V_x(x, y, z)] \end{aligned}$$

ということですね。Xは右端、xは左端です。dydzというのは、つまりは面積ですね。これにy,z方向を加えてやらなければなりません。こちらに残るのは境界のみです。そうするとどうなるかというと、和をまとめて面積と \vec{V} との有効な成分をとってやれば、(合計) $= \int_S d\vec{a} \cdot \vec{V}(\vec{x})$ となるわけです。こんな怪しげな言い方をしないでぶっちゃけて言ってしまうえば $d\vec{a} = (dydz dzdx dx dy)$ なんですけどね。結果をまとめれば、確かに

$$\int_V dv \vec{\nabla} \cdot \vec{V}(\vec{x}) = \int_S d\vec{a} \cdot \vec{V}(\vec{x})$$

となります。これが発散定理ですね。これを標語的に言えば、流出量の総量は境界における流出量を知るだけでわかる、というごくごく当たり前のことを表現しているのです。そもそもの「発散」が流出量を表すものなのです。(蛇足ながら、連続の方程式なる電荷などの保存を表す式がありますが、発散定理の式には時間が関係していませんので、特に保存とは関係しません。)

面倒になったので回転定理は省略で。ええ、省略するということはそれだけ大変だったことです。こちらでも微小な直方体でも考えてくるくる回してやればまわりと打ち消しあってくれるはずですが。こちらでも渦を考えるから「回転」なんですね。ちなみに私は証明を再現しようとしてあきらめました。

§6 おわりに

なんだか趣味に走った上にしまりのない終わりとなりましたが、電磁気学で使われる定理の意味が少しでもわかっていただければ幸いです。